

# **GEOMETRIA**

ZÁKLADY GEOMETRIE V ROVINE

**Geometria** je jedna z najstarších vedných disciplín. Vznikala z praktických potrieb (meranie pozemkov, stavitel'stvo, určovanie objemov). Vo svojich začiatkoch bola vedou o geometrických útvaroch, ich veľkosti, vzájomnej polohe a premiestňovaní. Hoci už v antickom Grécku dosiahlavysoký stupeň dokonalosti, jej výraznejší rozvoj pokračoval až v novoveku od zrodu analytickej geometrie (17. storočie, Descartes, Fermat) až po neeuklidovské geometrie (19. storočie, Bolyai, Lobačevskij).

1. Dané sú dva rôzne body A, B. Zostrojte:
  - a) kružnicu s priemerom AB
  - b) stred úsečky AB

2. Daná je kružnica  $k(S, r)$ , bod  $A$  ležiaci na tejto kružnici, bod  $B$  ležiaci zvonka kružnice, bod  $C$  ležiaci vo vnútri kružnice. Zostrojte:

- tetivu so stredom  $C$
- dotyčnicu v bode  $A$
- všetky dotyčnice prechádzajúce bodom  $B$
- všetky kružnice so stredom  $B$  (so stredom  $C$ ) ktoré sa dotýkajú kružnice  $k$

3. Daný je ostrouhlý (pravouhlý, tupouhlý) nerovnostranný (rovnoramenný, rovnostranný) trojuholník. Pre každý z týchto trojuholníkov zostrojte:
- a) priesečník výšok
  - b) ťažisko
  - c) opísanú a vpísanú kružnicu

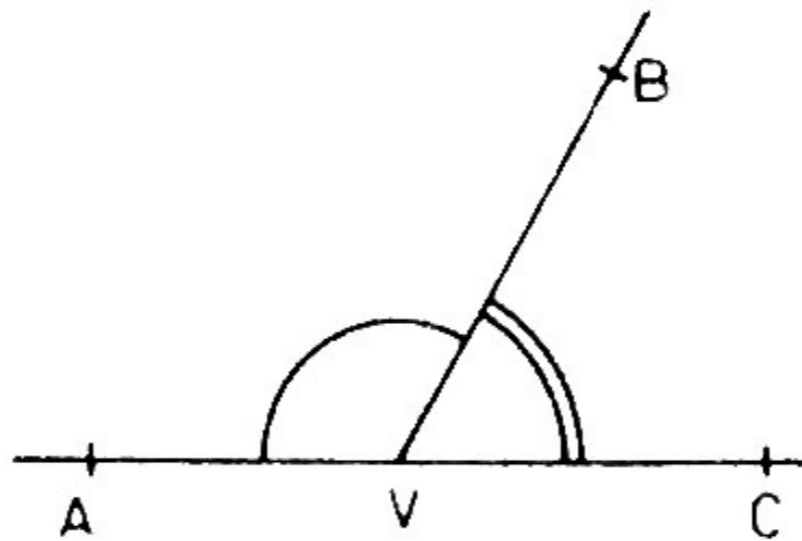
## **Základné útvary / pojmy:**

- bod
- priamka, polpriamka
- rovina, polrovina

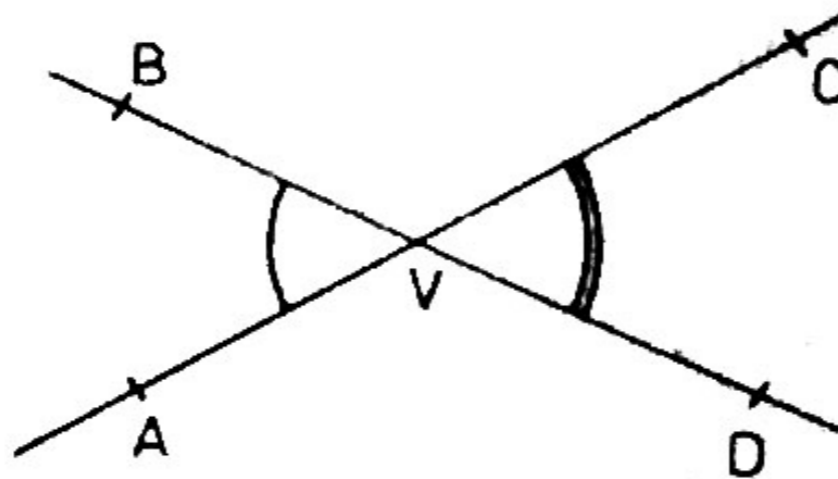
## **Dvojice uhlov:**

- susedné
- vrcholové
  
- priľahlé
- súhlasné
- striedavé

- susedné

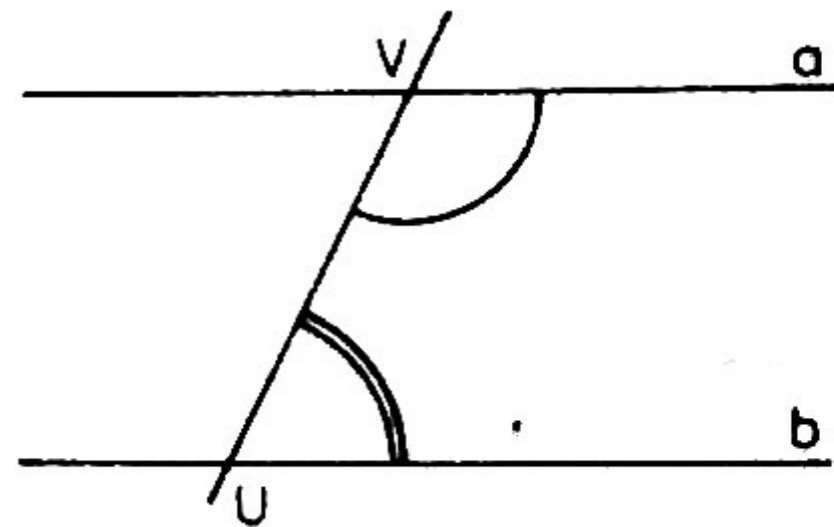
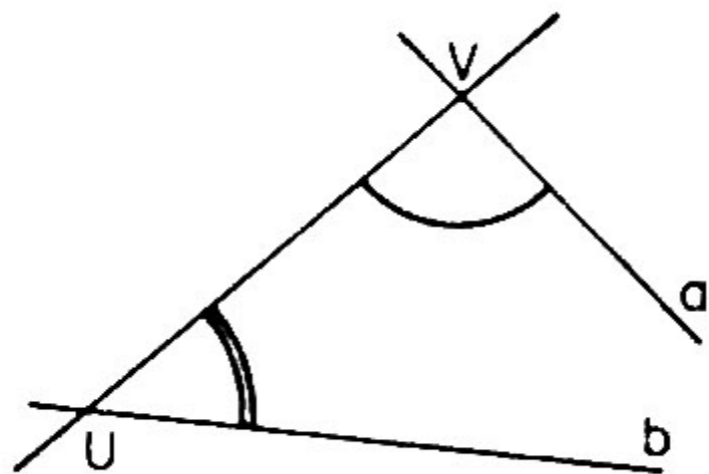


- vrcholové

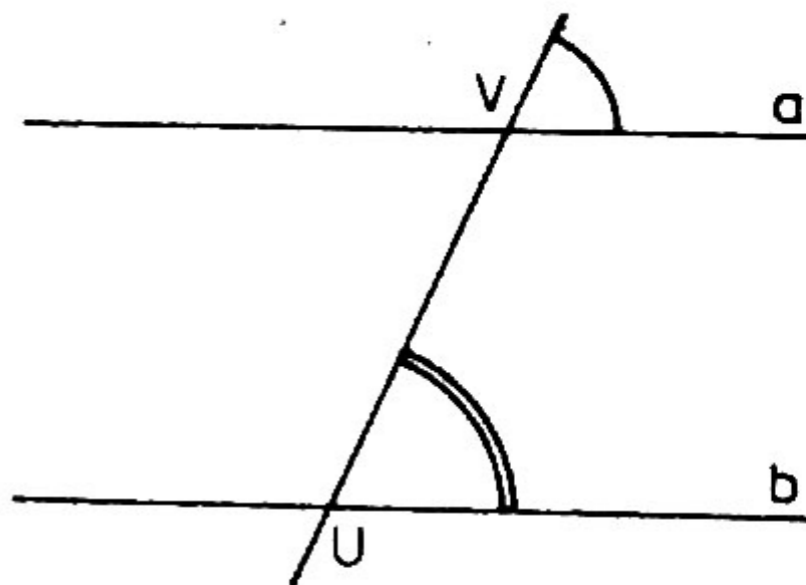
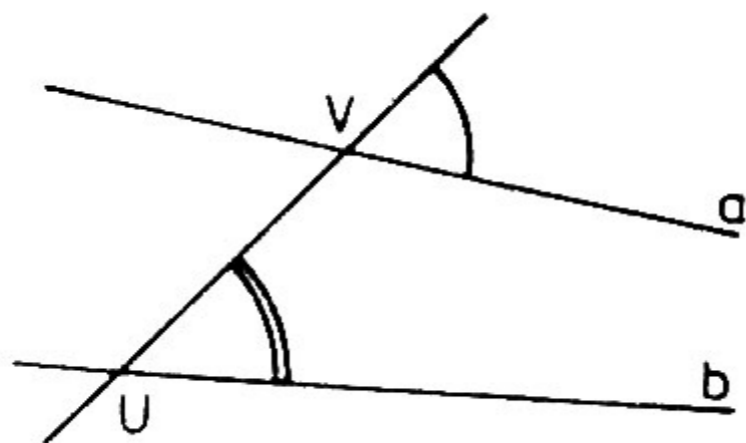




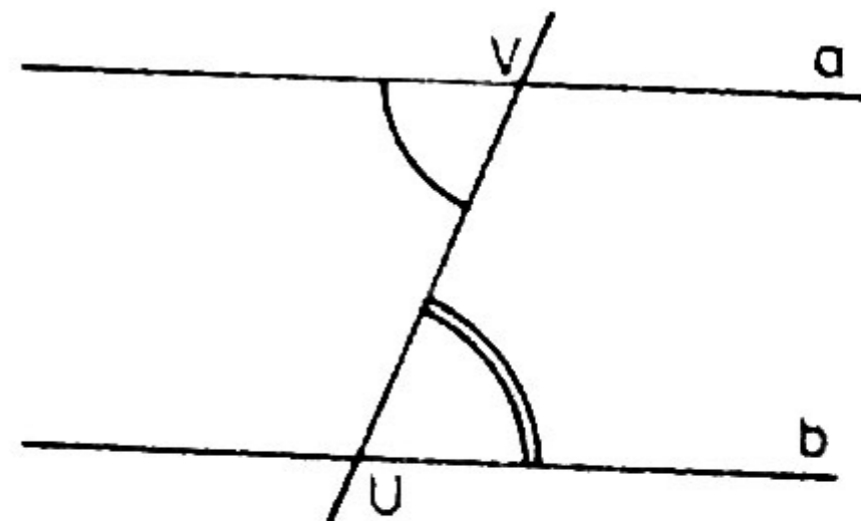
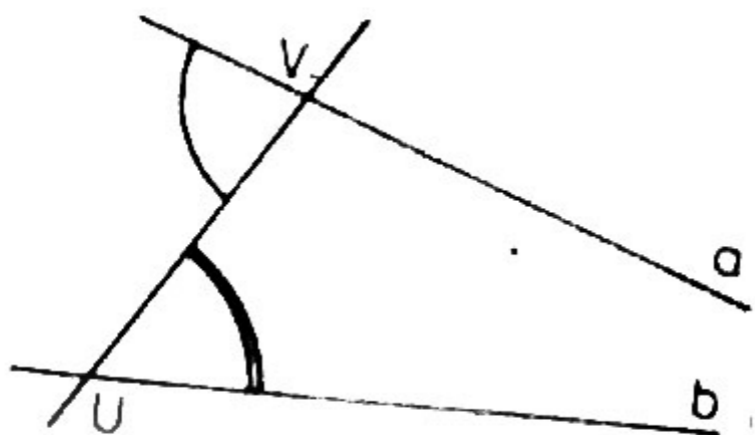
- príľahlé



- súhlasné



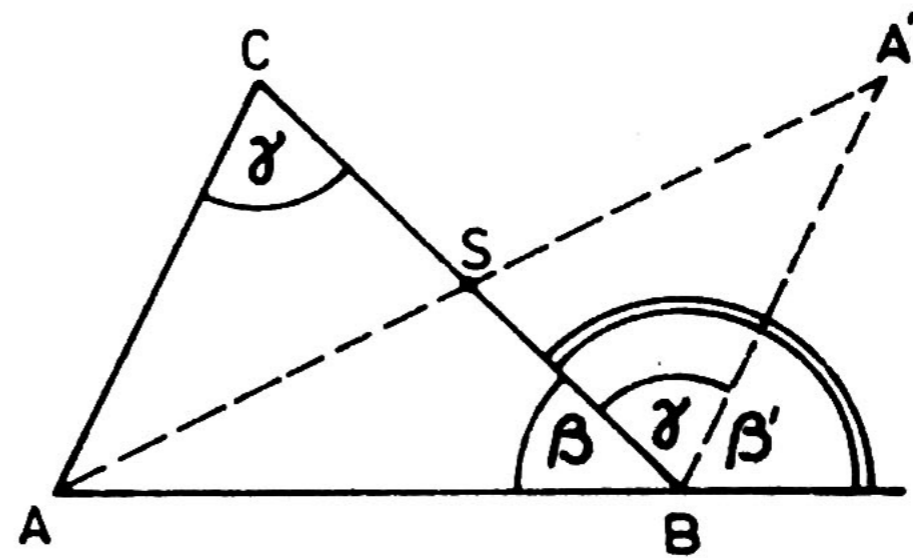
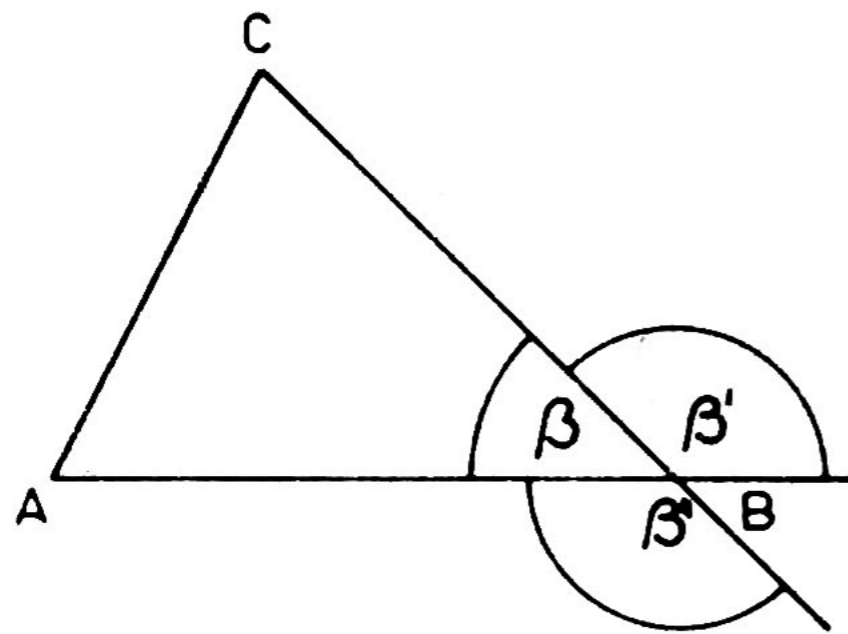
- striedavé



## **V každom trojuholníku**

- sa vonkajší uhol pri jednom vrchole rovná súčtu vnútorných uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch.

= sa súčet jeho vnútorných uhlov rovná priamemu uhlu ( $180^\circ$ ).



## **Uhly v kružniciach**

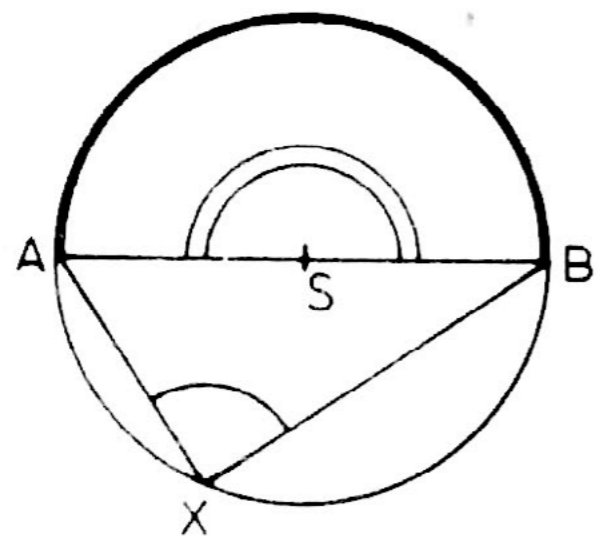
Pojmy:

- kružnica, polkružnica, oblúk (väčší, menší)
- každý oblúk kružnice možno získať ako prienik kružnice a uhla ASB, tento uhol sa nazýva “stredový uhol“
- stredový uhol môže byť konvexný. priamy alebo nekonvexný

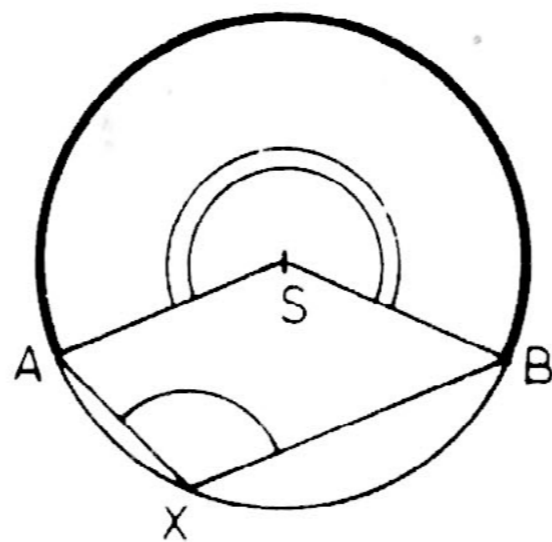
## **Uhly v kružniciach**

V každej kružnici je stredový uhol dvojnásobkom ľubovoľného obvodového uhla prislúchajúceho k tomu istému oblúku.

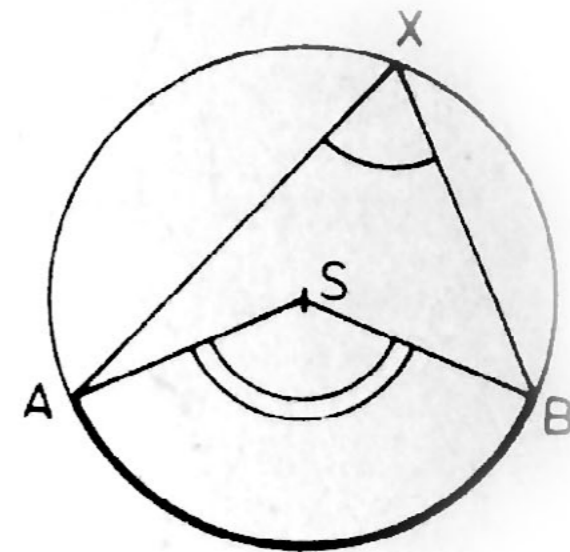
Obvodový uhol prislúchajúci k polkružnici je pravý uhol nad priemerom polkružnice - **Tálesova veta**.



a)



b)



c)

Úloha:

Trojuholník “v hodinách“, body na pozíciách

a) 2 , 7, 9

b) 3, 6, 10

c) 4, 5, 12

Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníkov.

# **GONIOMETRIA**

V SKRATKE

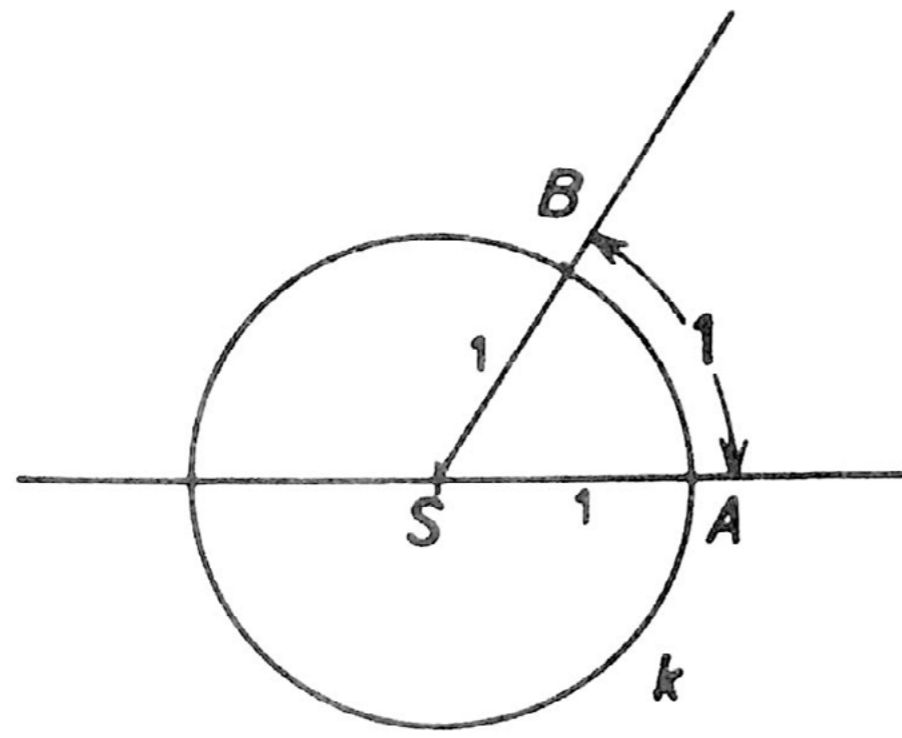


## **Uhol v stupňovej a oblúkovej miere**

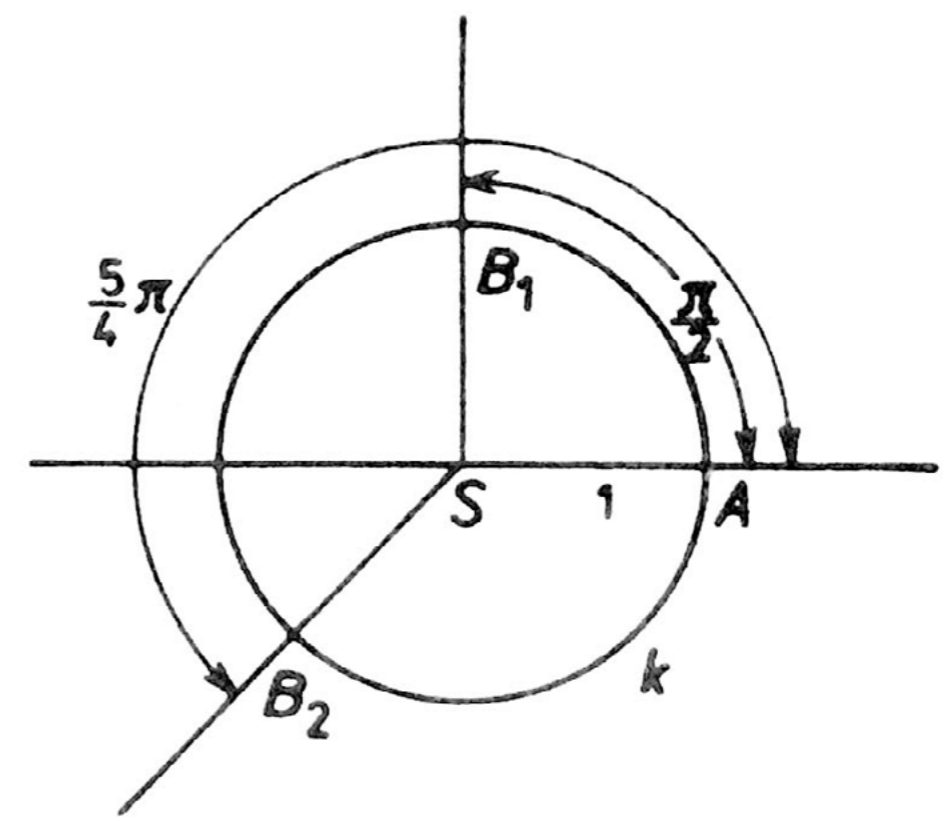
Jednotková kružnica - kružnica s polomerom 1.  
Dĺžka jednotkovej kružnice =  $2\pi$ .

Uhol má veľkosť 1 rad (radián), keď dĺžka prislúchajúceho oblúka na jednotkovej kružnici je rovná 1.

Tz.  $360^\circ$  (stupňov) predstavuje  $2\pi$  rad (radiánov).



OL-51



OL-52

Úloha:

Kolko stupňov má 1 radián?

Úloha:

Kolko stupňov má 1 radián?

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$1 \text{ rad} = 360^\circ / 2\pi$$

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$$

Úloha:

Uhol  $\pi/12$  rad určme v stupňoch. ( $15^\circ$ )

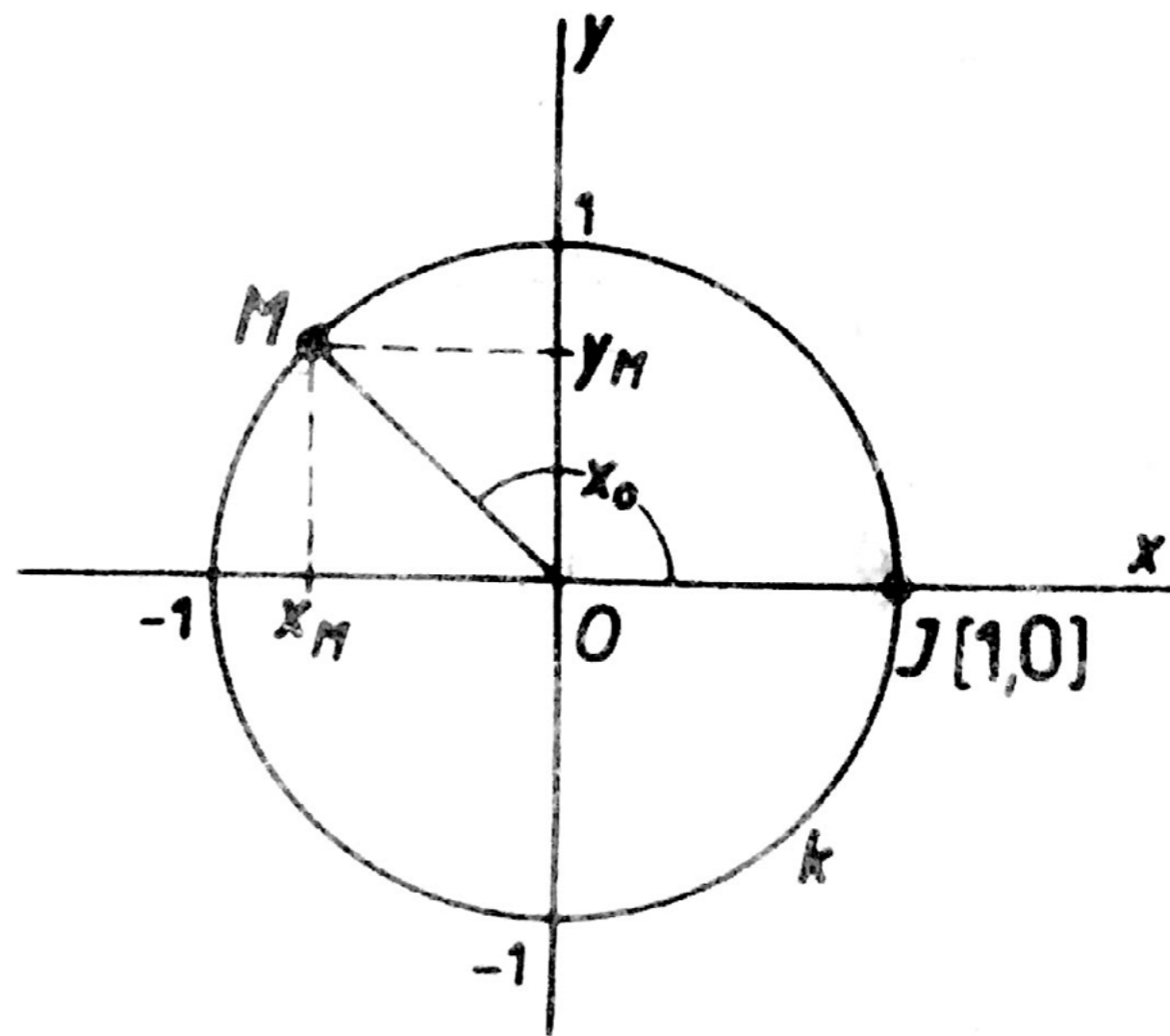
Uhol  $120^\circ$  určme v oblúkovej miere. ( $2/3\pi$ )

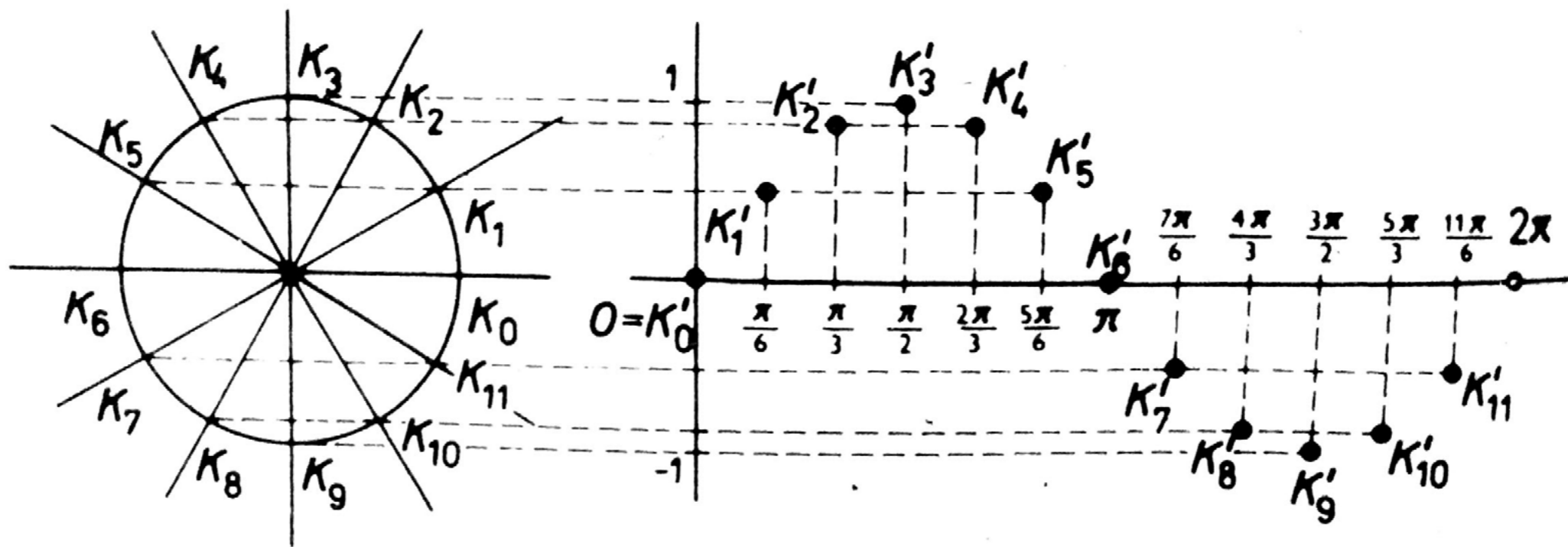
## Funkcie sínus a kosínus

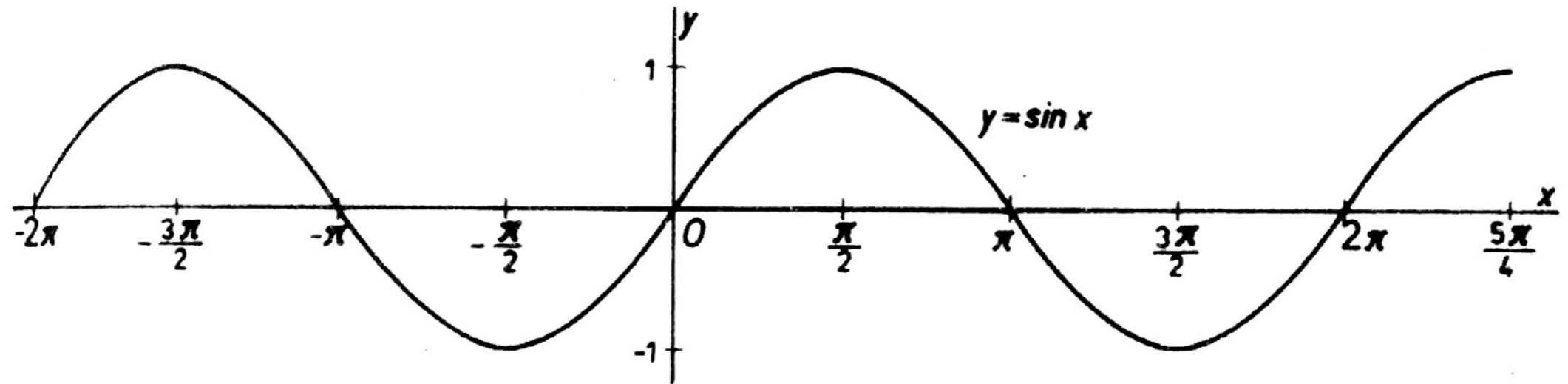
Bod  $M$  na jednotkovej kružnici.  
Uhol  $JOM$ .

Sínus uhla = veľkosť  $OY_m$ .

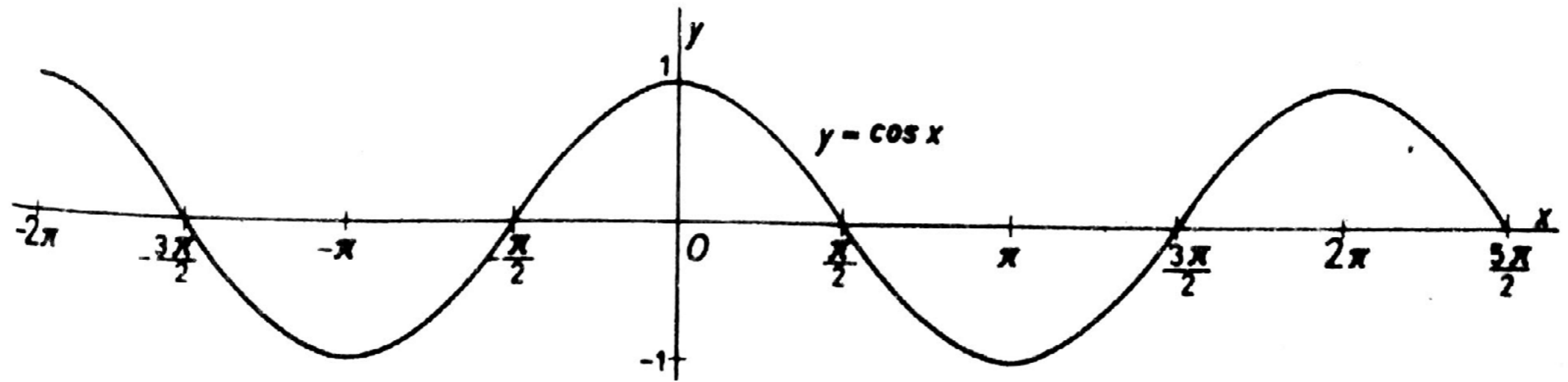
Kosínus uhla = veľkosť  $OX_m$ .







Obj. 5.22



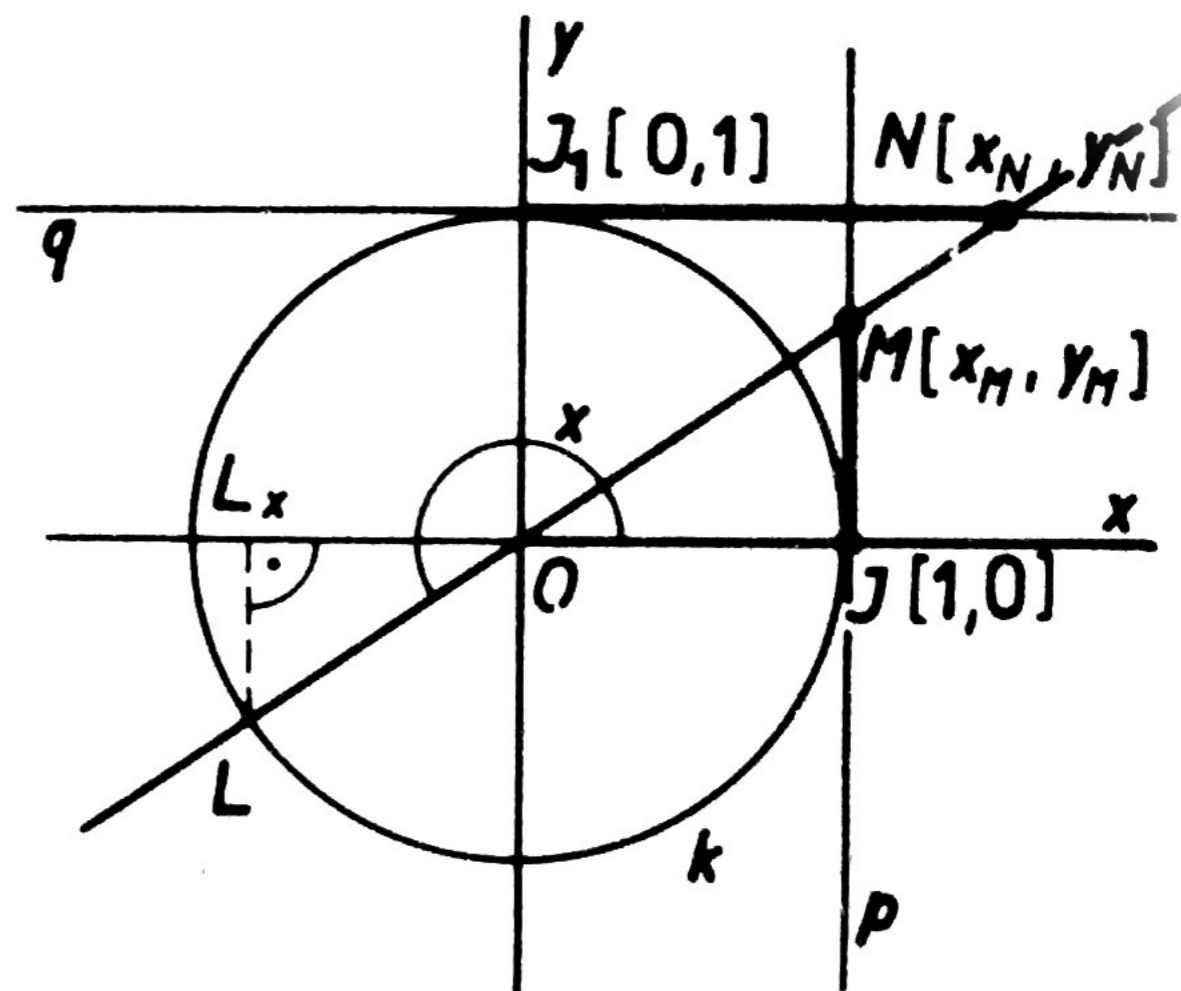
Obj. 5.23

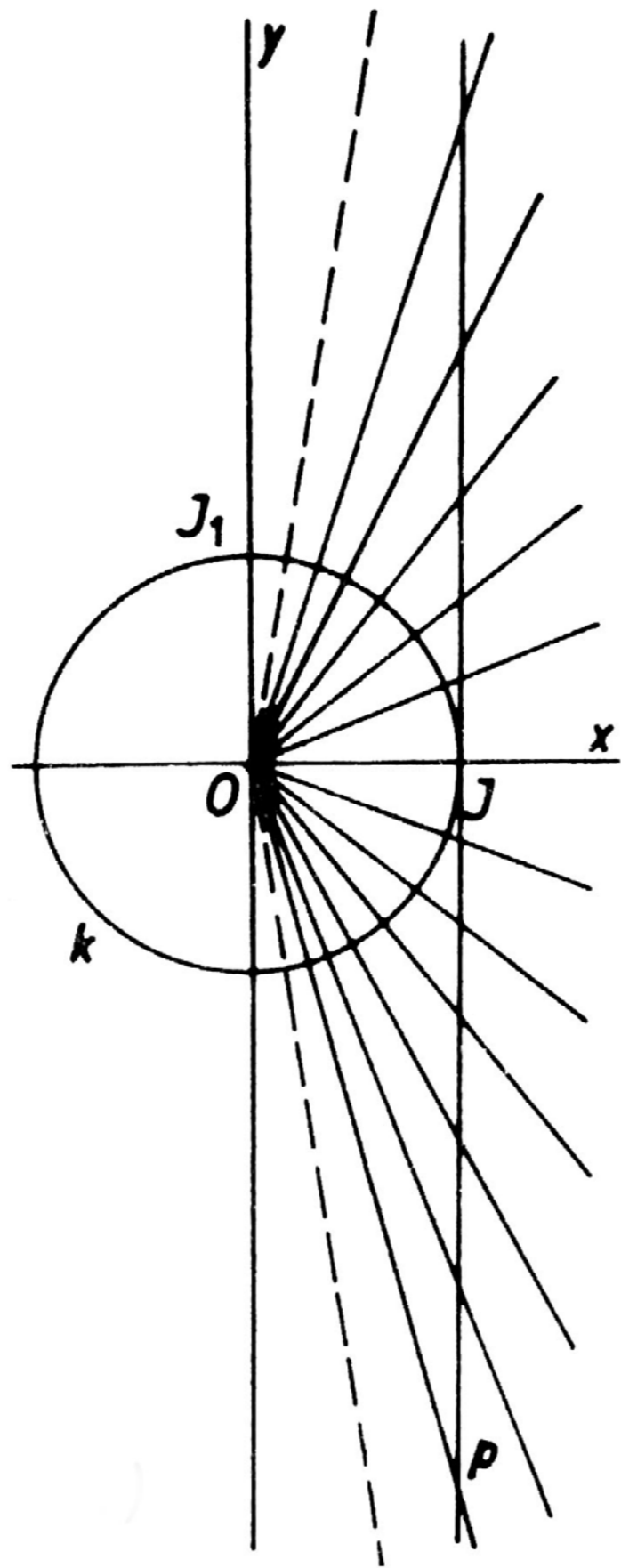


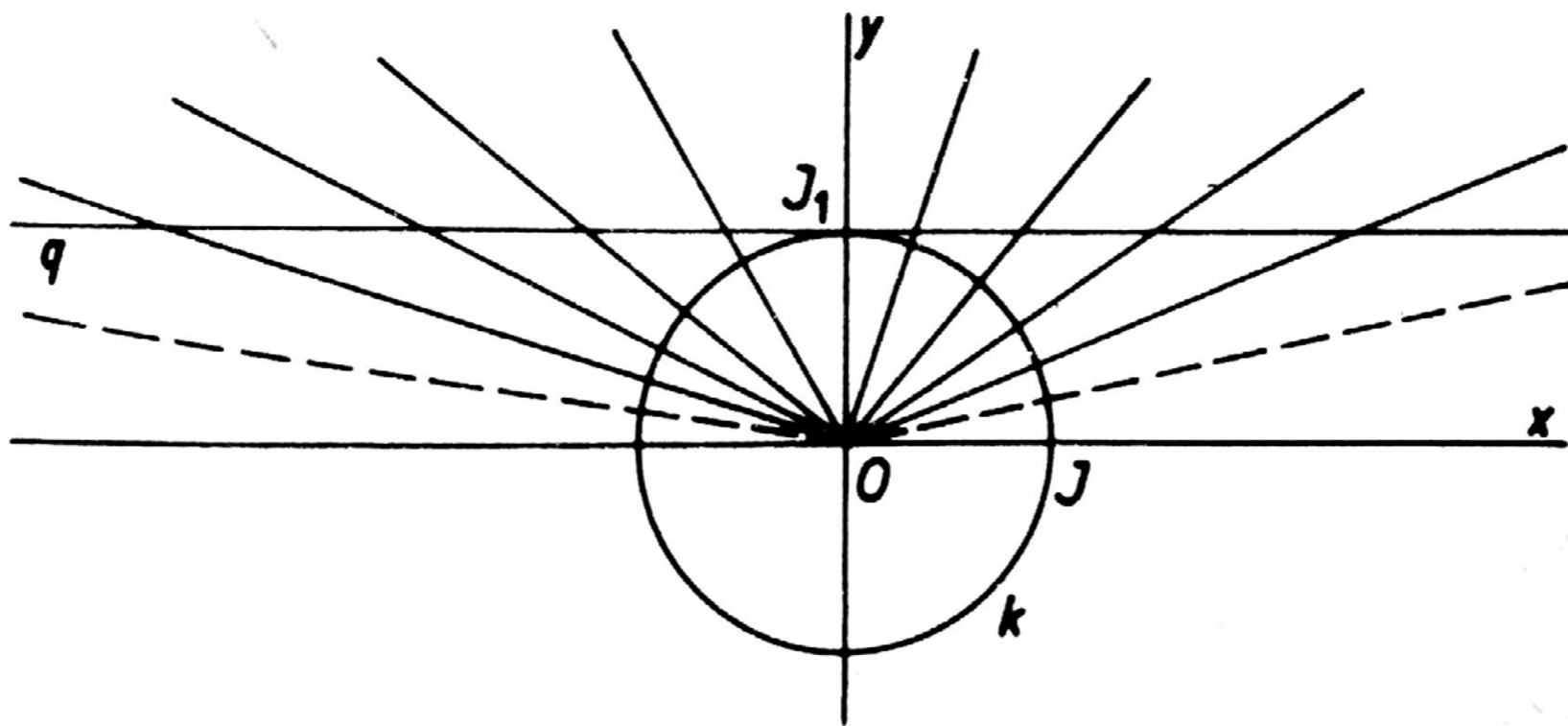
## Funkcie tangens a kotangens

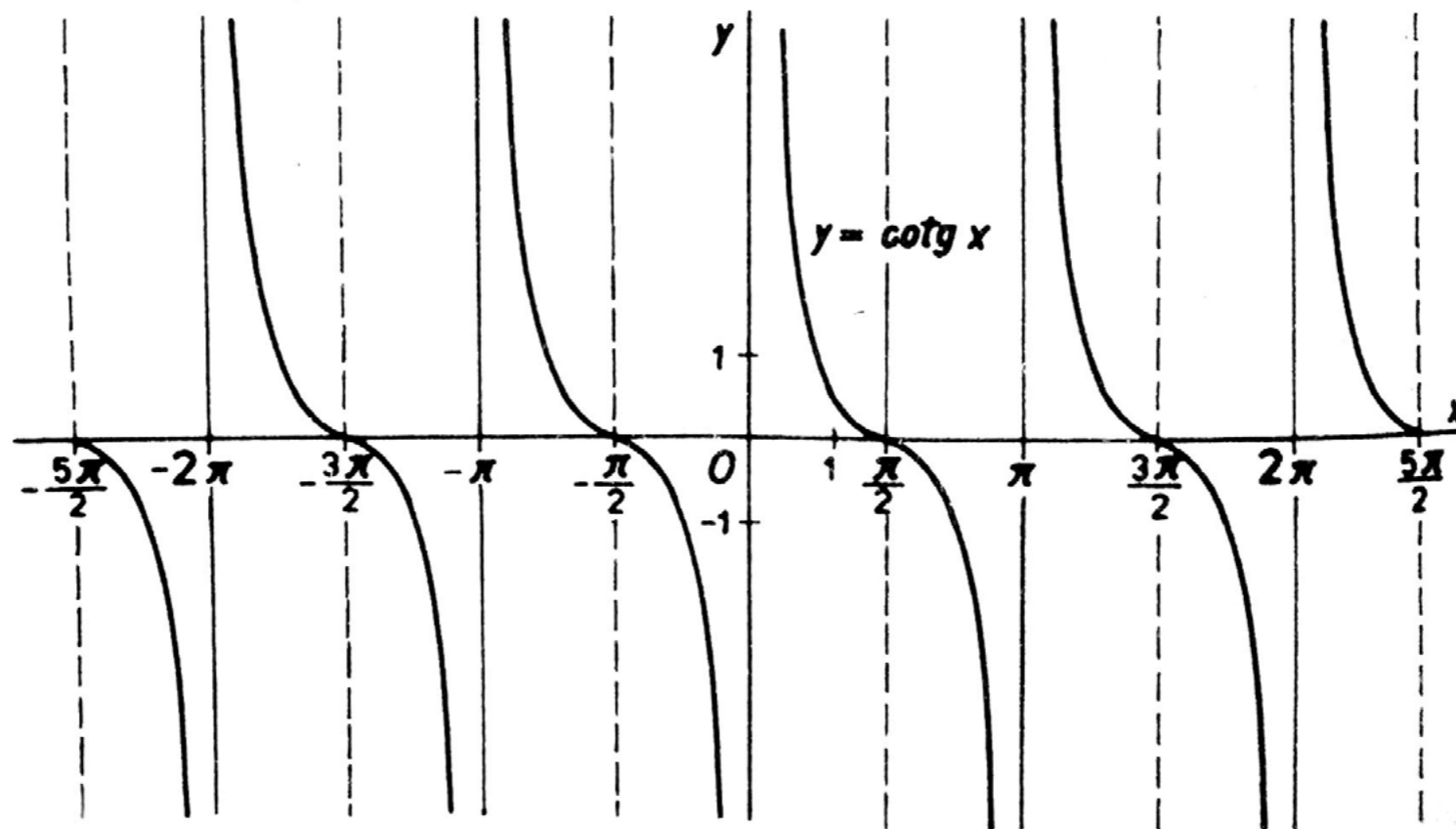
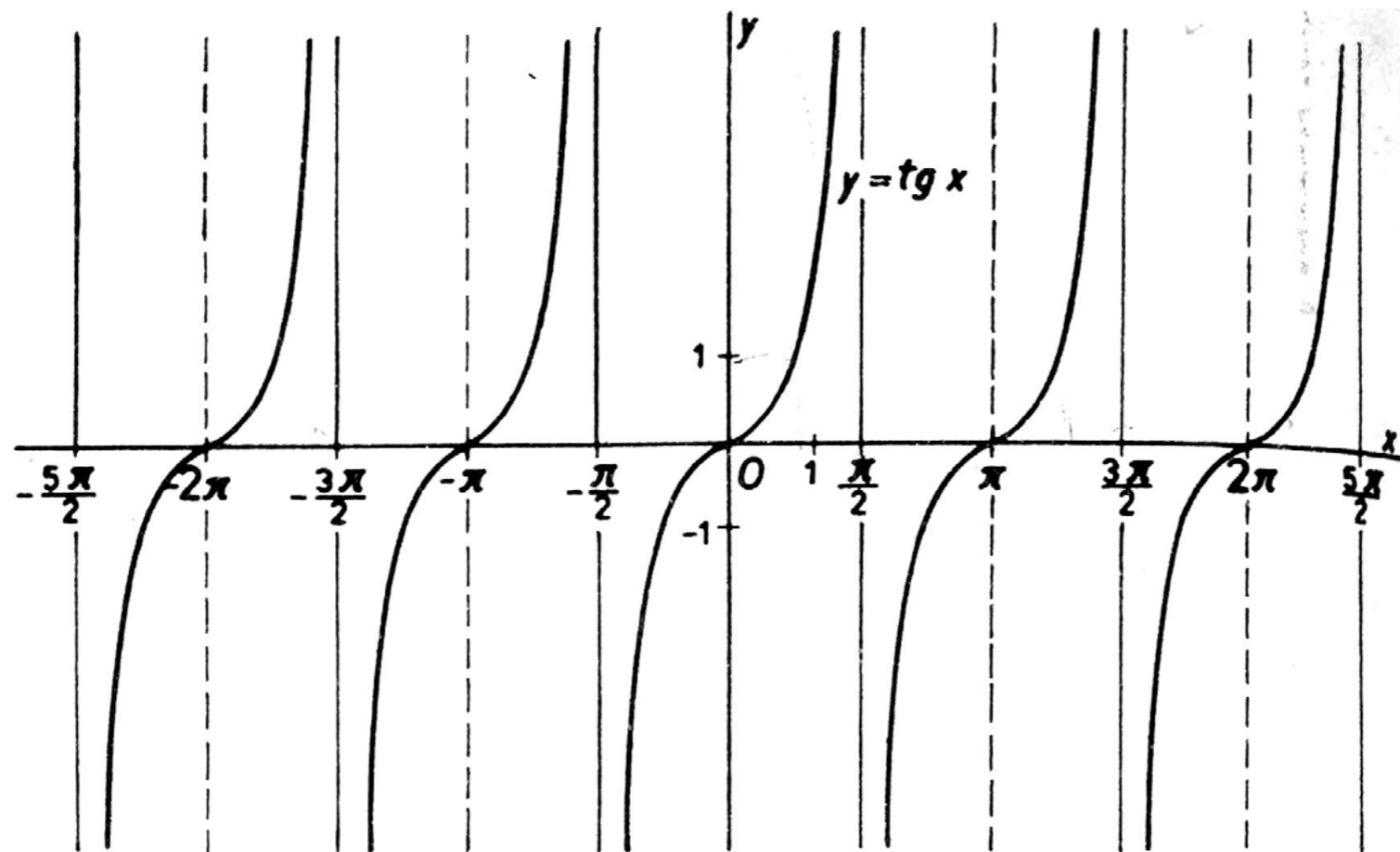
Bod L na jednotkovej kružnici.  
Uhol JOL.

Tangens uhla = veľkosť JM.  
Kosínus uhla = veľkosť J1N.









## **Vzt'ahy v pravouhlom trojuholníku**

Sin = proti'ahlá strana / prepona

Cos = pri'ahlá strana / prepona

Tg = proti'ahlá strana / pri'ahlá strana

CoTg = pri'ahlá strana / proti'ahlá strana

Úloha:

Pri budovaní hradieb na rovnej ploche je daná požadovaná výška 7,5m a šírka hornej časti hradieb 2,9m. Uhol stien je 75 stupňov. Aká bude šírka podstavy? (cca 6.95m)

Úloha:

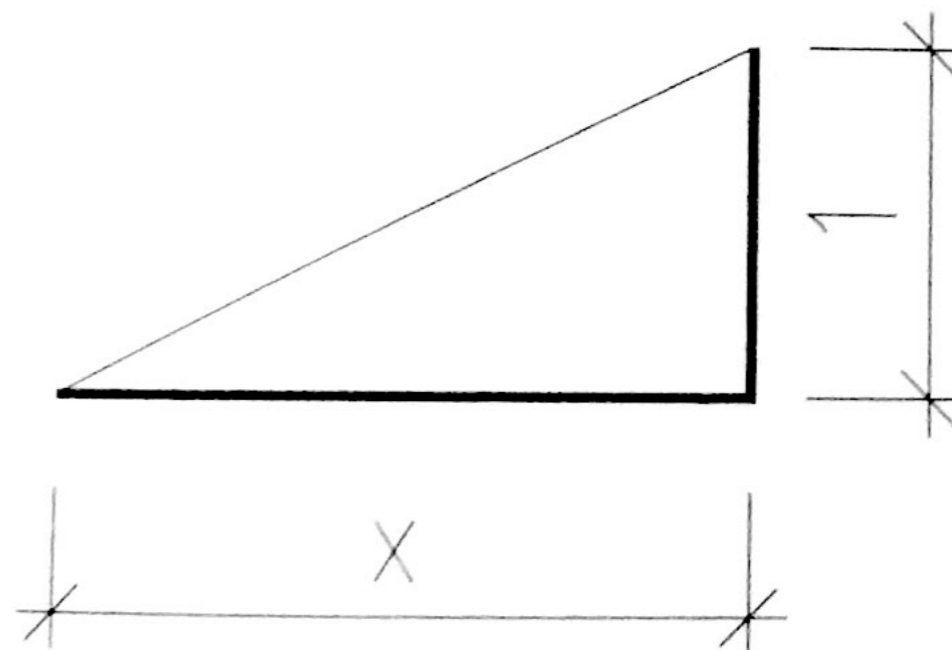
Pri budovaní hradieb na rovnej ploche je daná požadovaná výška 7,5m a šírka hornej časti hradieb 2,9m. Uhol stien je 75 stupňov. Aká bude šírka podstavy? (cca 6.95m)

## Prepočet sklonov

10° - uhol pri vrchole trojuholníka

1:5 - pomer 1 (výška) / dĺžka

2% - na 1 meter vystúpa o 2cm





Úloha:

Prepočítaj sklon 10 stupňov na % a pomer.

Prepočítaj sklon 8% na stupne a pomer.

# **GEOMETRICKÉ ZOBRAZENIA**

V ROVINE

## **Zhodné zobrazenia**

- zachovávajú tvar (uhol)
- zachovávajú veľkosť

## **Podobné zobrazenia**

- zachovávajú tvar (uhol)
- nezachovávajú veľkosť (resp. podľa určitého koeficientu)

## **Zhodné zobrazenia**

Osová súmernosť

Stredová súmernosť

Otočenie

Posunutie

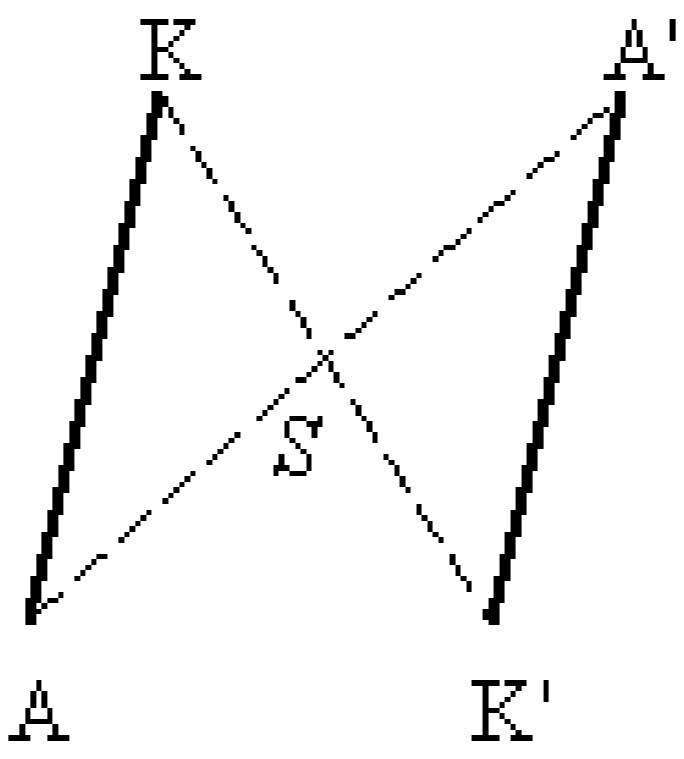
Identita

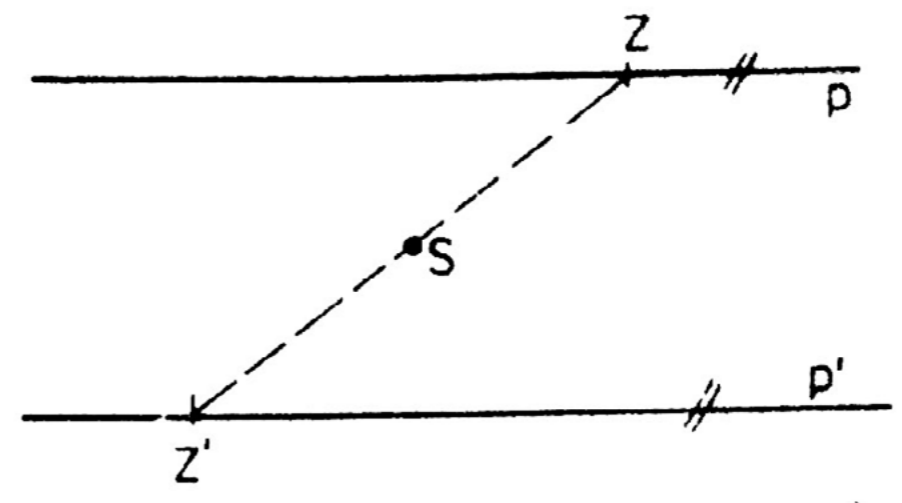
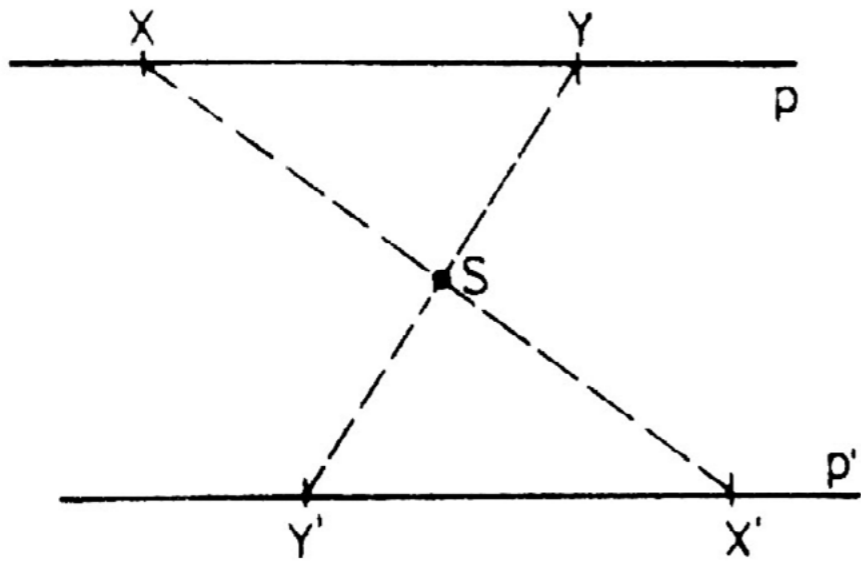
## **Podobné zobrazenia**

Rovnoľahlosť

## Stredová súmernosť

- jednoznačne určená svojím stredom  $S$   
(každému bodu  $X$  roviny je možné priradiť jeho obraz  $X'$ )
- bodu  $X$  je priradený bod  $X'$  tak, že  $S$  je stred úsečky  $XX'$ .
- obrazom každej priamky  $p$  (ktorá neprechádza bodom stredom súmernosti), je priamka  $p'$  rovnobežná s pôvodnou priamkou  $p$
- priamku  $p'$  zostrojíme pomocou obrazov 2 bodov, alebo ako rovnobežku vedenú obrazom 1 bodu
- má jeden samodružný bod –  $S$ , samodružné priamky sú priamky prechádzajúce stredom





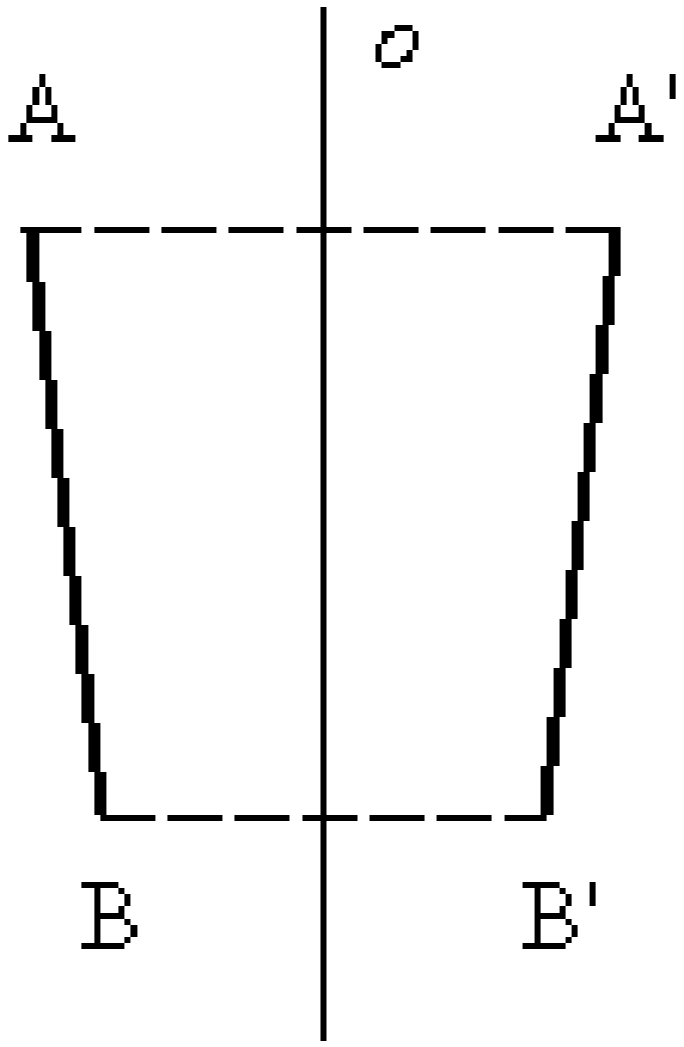
Úloha:

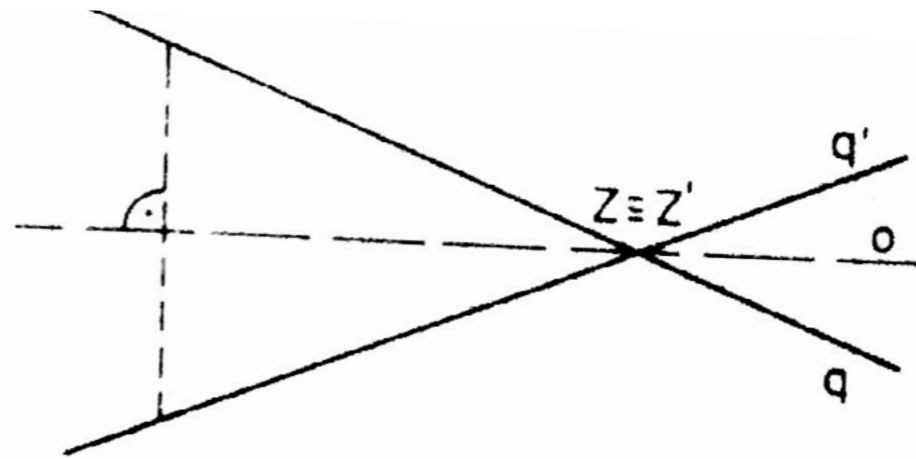
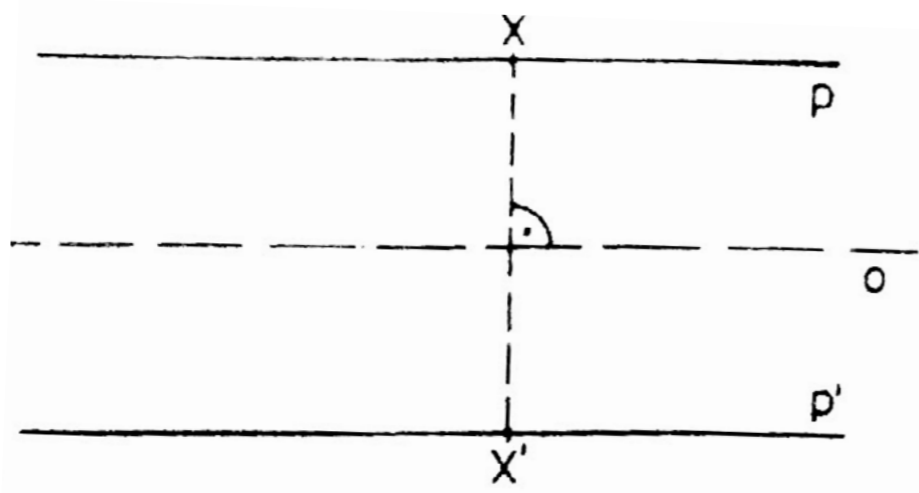
Ľubovoľný tupouhlý trojuholník zobrazte v stredovej súmernosti so stredom  $S$ , ktorý je totožný so stredom opísanej kružnice.



## Osová súmernosť

- jednoznačne určená osou súmernosti –  $o$   
(každému bodu  $X$  roviny je možné priradiť jeho obraz  $X'$ )
- bodu  $X$  je priradený bod  $X'$  tak, že  $o$  je osou úsečky  $XX'$
- obrazom každej priamky  $p$  rovnobežnej s osou, je taktiež priamka  $p'$  rovnobežná s osou
- obrazom každej priamky  $q$  rôznobežnej s osou, je priamka  $q'$  pretínajúca priamku  $q$  v bode priesečníku s osou súmernosti
- samodružnými bodmi sú body osi, samodružné priamky sú priamky kolmé na os súmernosti



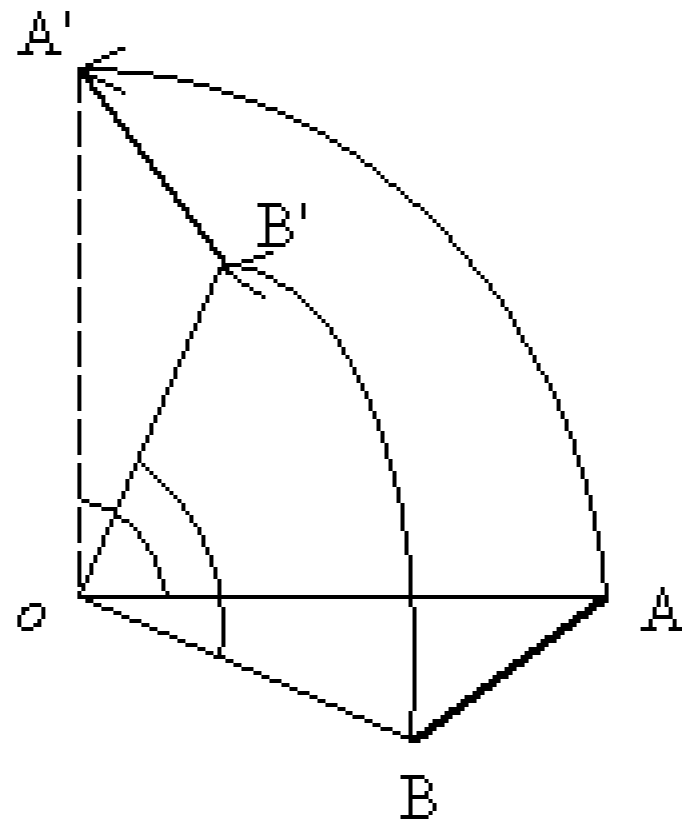


Úloha:

Ľubovoľný nepravidelný päťuholník  $ABCDE$  zobrazte v osovej súmernosti podľa osi  $o$ , ktorú tvorí priamka  $AC$ .

## Otočenie

- je dané stredom otáčania  $O$  a uhlom otáčania  $\alpha$
- uhol môže byť kladný alebo záporný:
  - kladný uhol – proti pohybu hodinových ručičiek,
  - záporný uhol – v smere hodinových ručičiek.
- bodu  $A$  je priradený bod  $A'$  tak, že uhol  $\angle AOA' = \alpha$  a platí  $|AO| = |A'O'|$
- samodružné body: stred otáčania  $O$ , všetky body pri otáčaní o uhol  $k \cdot 360$



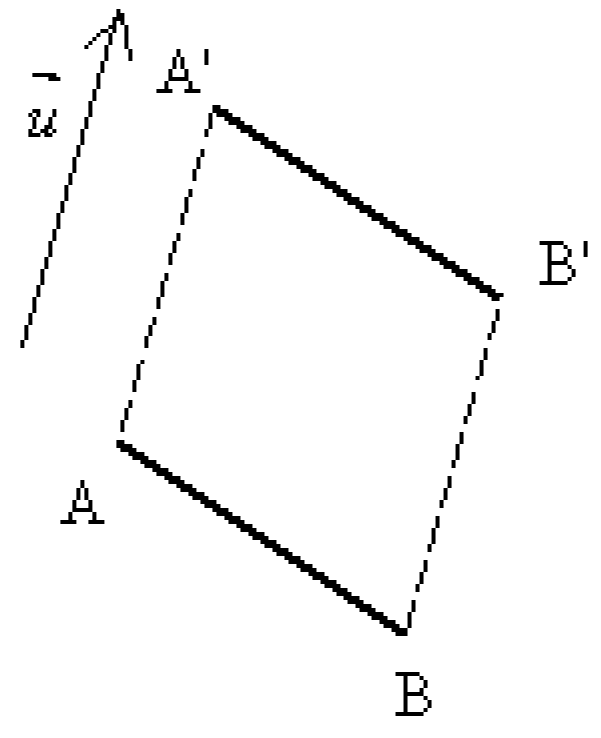
Úloha:

Ľubovoľný trojuholník zobrazte v otočení danom stredom  $S$ , ktorý sa nachádza mimo trojuholníka  $ABC$  a uhlom  $\alpha = 60^\circ$ .

## Posunutie

- je dané vektorom posunutia  $\mathbf{v}$
- bodu  $A$  priradíme bod  $A'$  tak, že vektor  $AA' =$  vektor posunutia  $\mathbf{v}$
- samodružné body a útvary pri posunutí o nenulový vektor nie sú



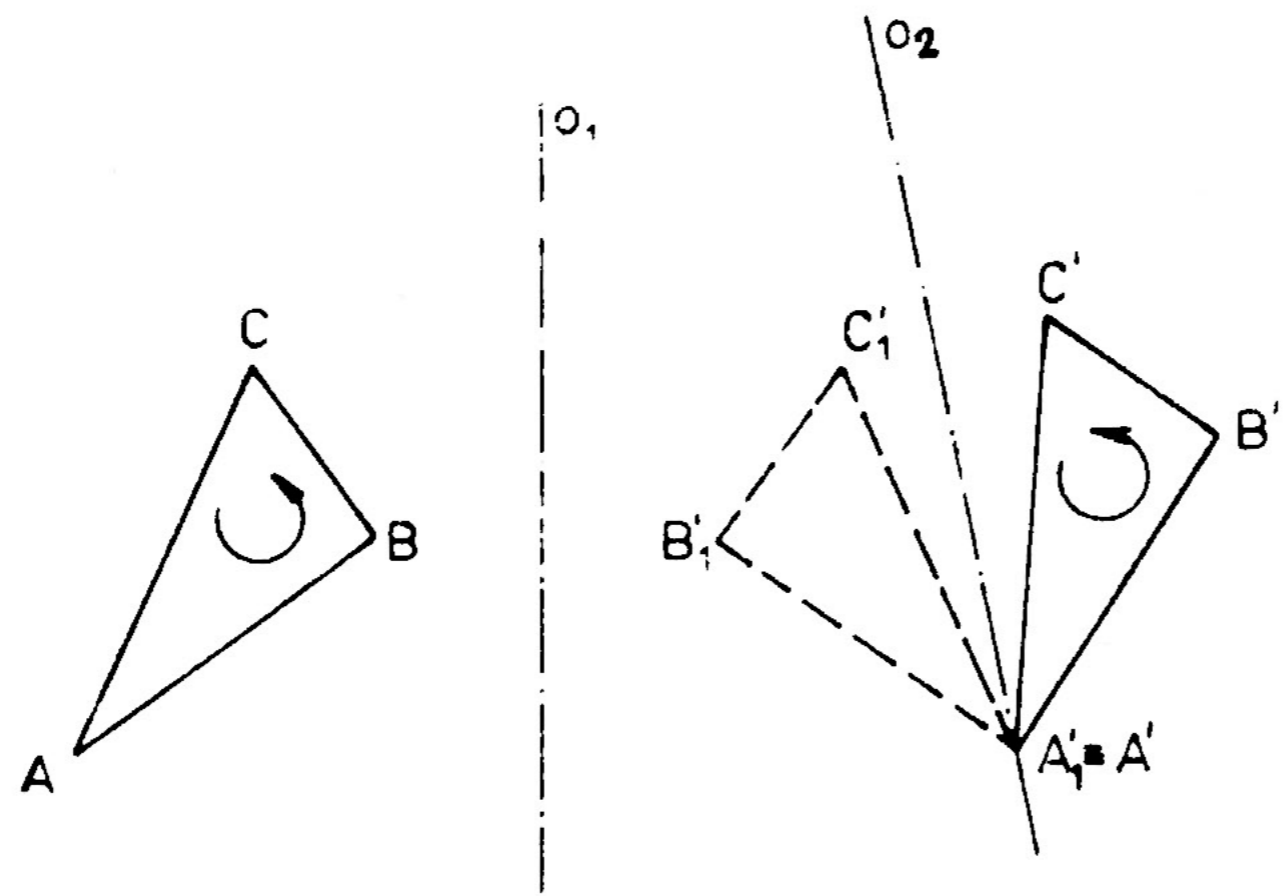


Úloha:

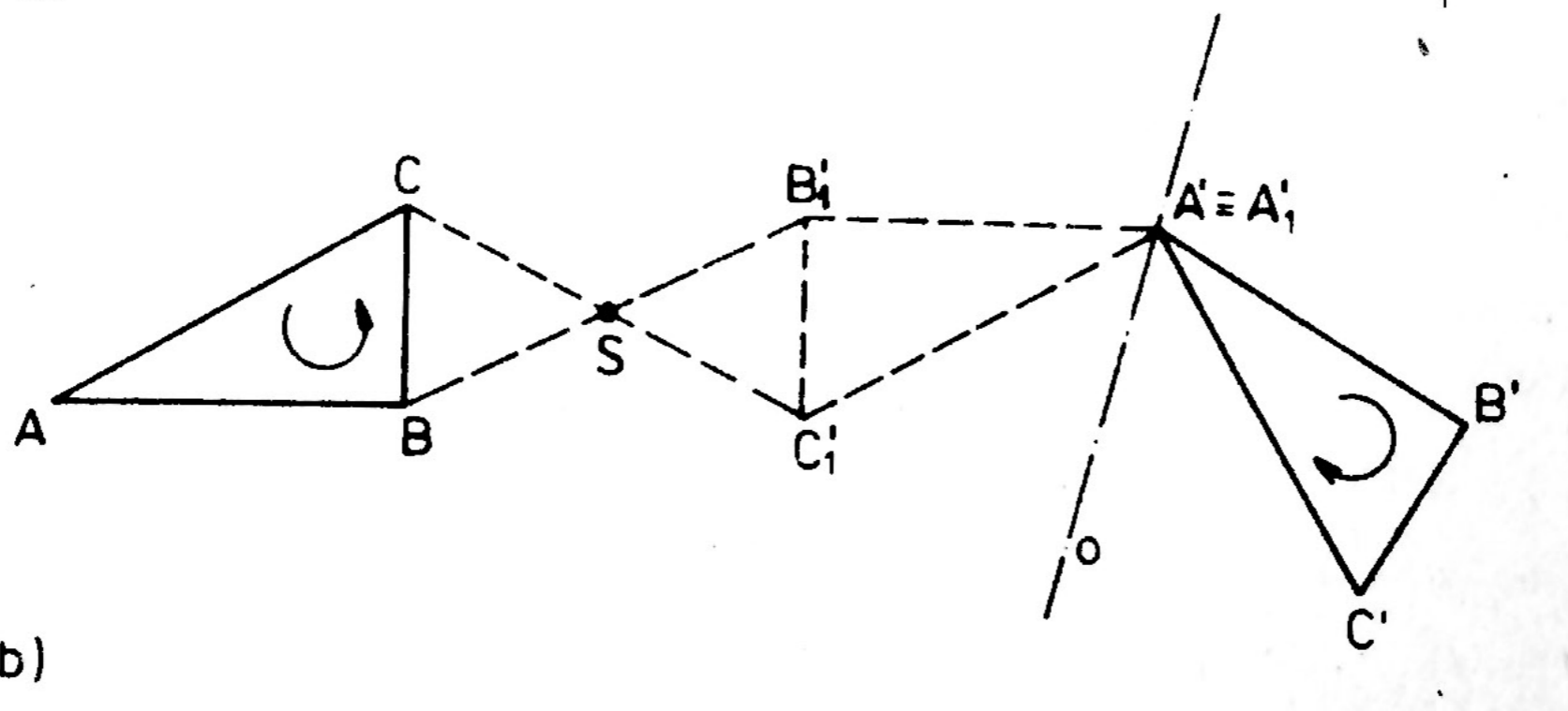
Nerovnoramenný lichobežník ABCD zobrazte posunutí danom vektorom  $\rightarrow AC$ .

## **Skladanie súmerností**

Každé zhodné zobrazenie v rovine, ktoré nie je súmernosťou, je možné vyjadriť ako zloženie dvoch súmerností.



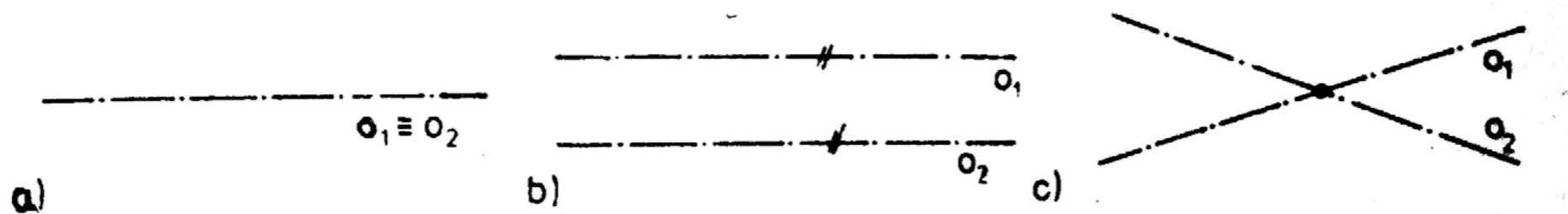
a)



b)

## Skladanie súmerností

T.z. aj identita, posunutie a otočenie je nahraditeľná zložením dvoch súmerností.



Úloha:

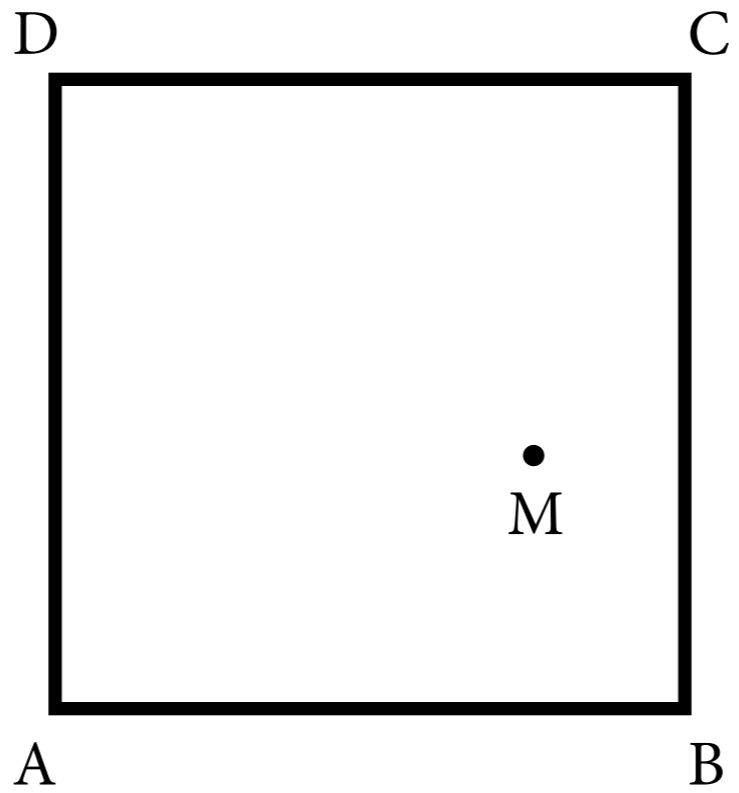
Je daný trojuholník  $ABC$ :  $|AB|=6\text{cm}$ , uhol  $BAC=30^\circ$ , uhol  $ABC=60^\circ$  a jeho obraz  $A'B'C'$ , resp.  $C'B'A'$ . Nájdite vhodné súmernosti, ktorých zložením vznikne daný obraz  $A'B'C'$ .

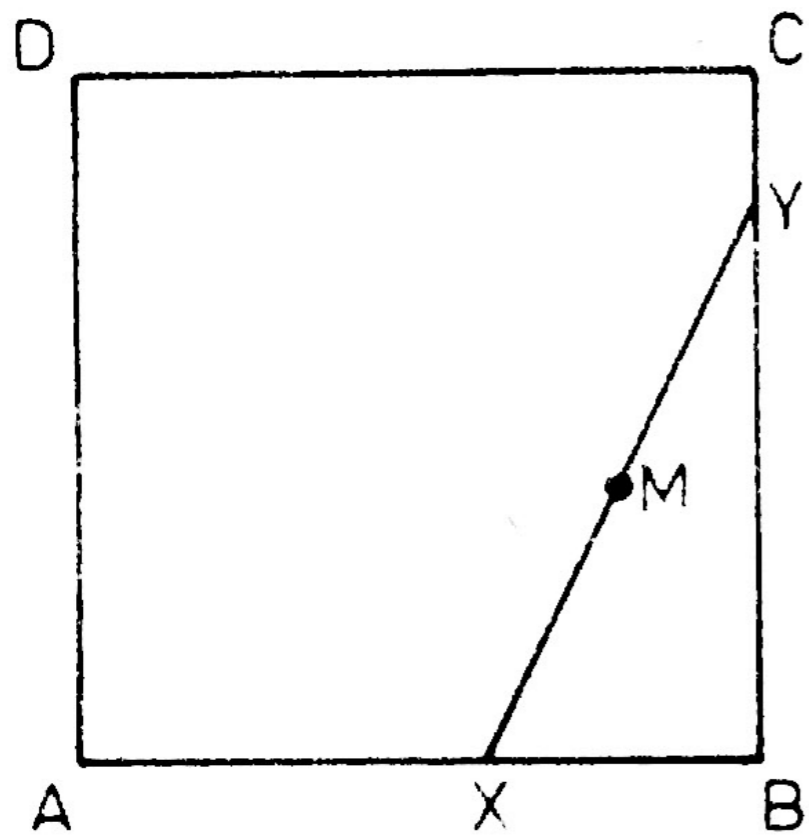
**Praktické úlohy**  
**využitie konštrukcií súmerností**

Úloha:

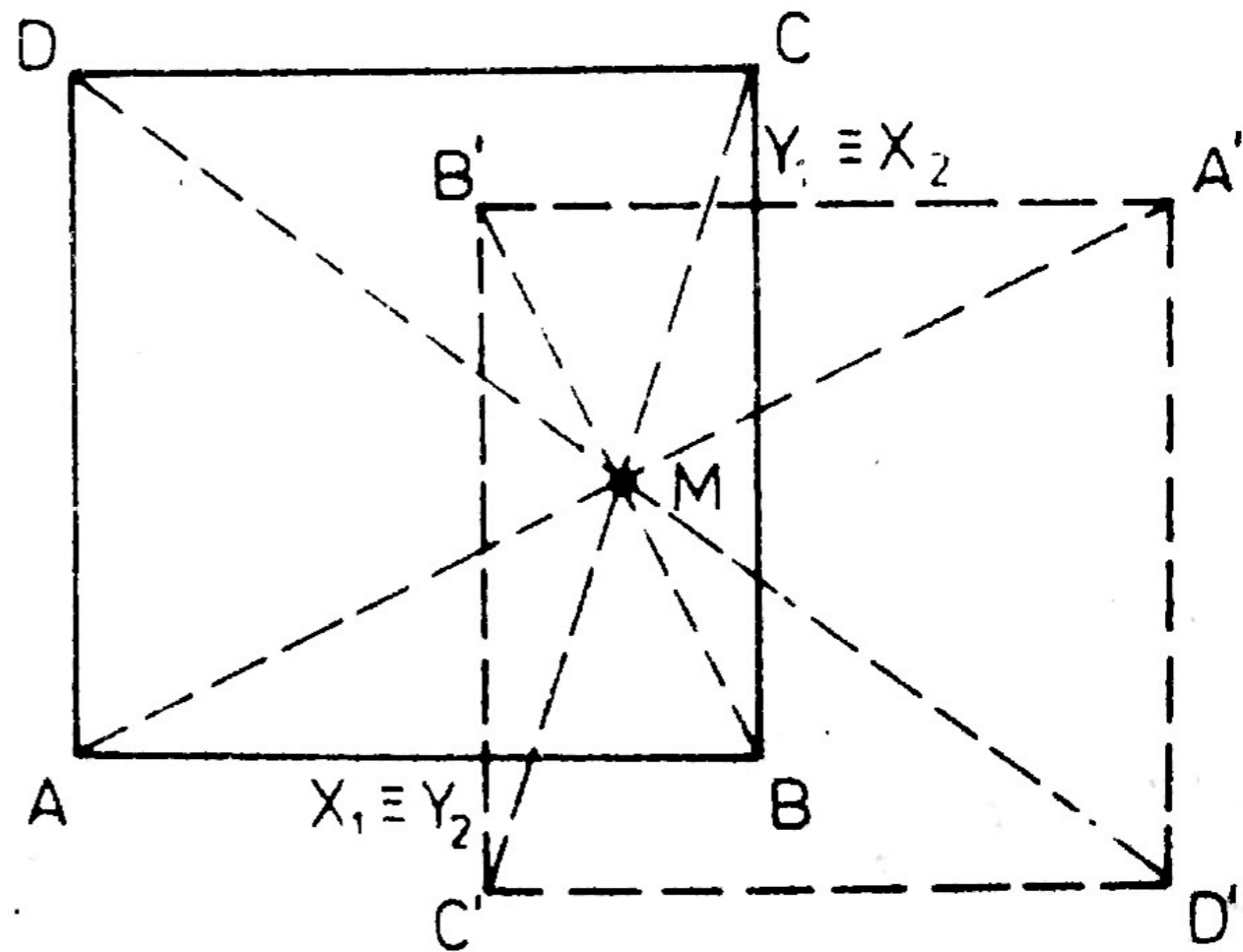
Daný je štvorec  $ABCD$  a jeho vnútorný bod  $M$ . Zostrojte všetky úsečky  $XY$ , ktoré majú stred  $M$  a krajné body  $X, Y$  ležia na hranici štvorca  $ABCD$ .







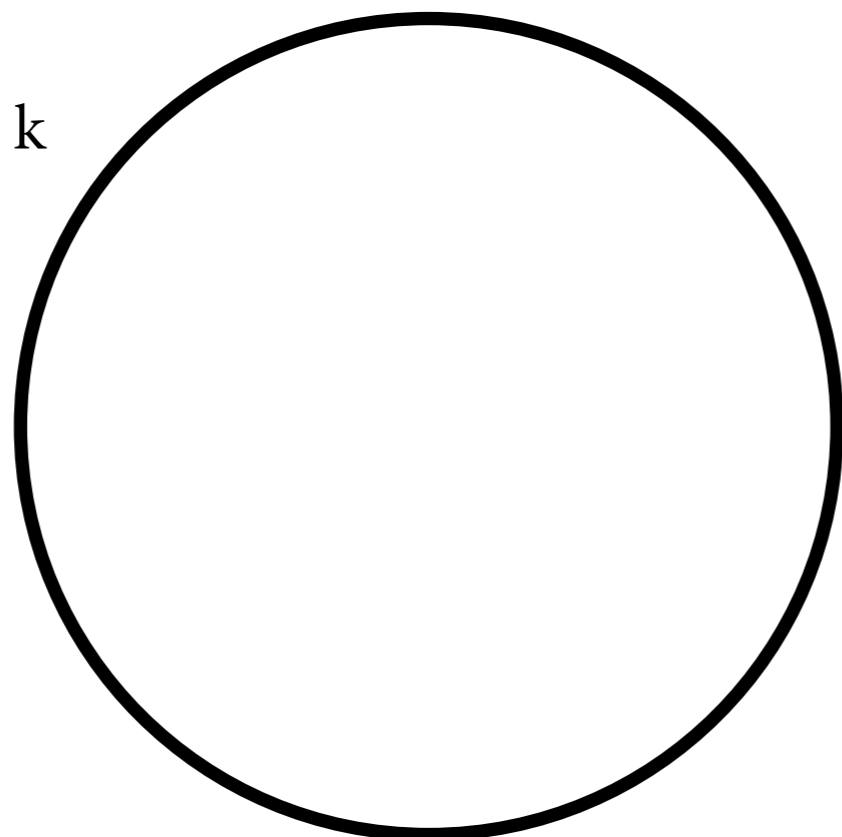
a)



b)

Úloha:

Daná je priamka  $p$ , bod  $A$  a kružnica  $k$ . Zostrojte všetky štvorce  $ABCD$ , ktoré majú vrchol  $B$  na priamke  $p$  a vrchol  $D$  na kružnici  $k$ .



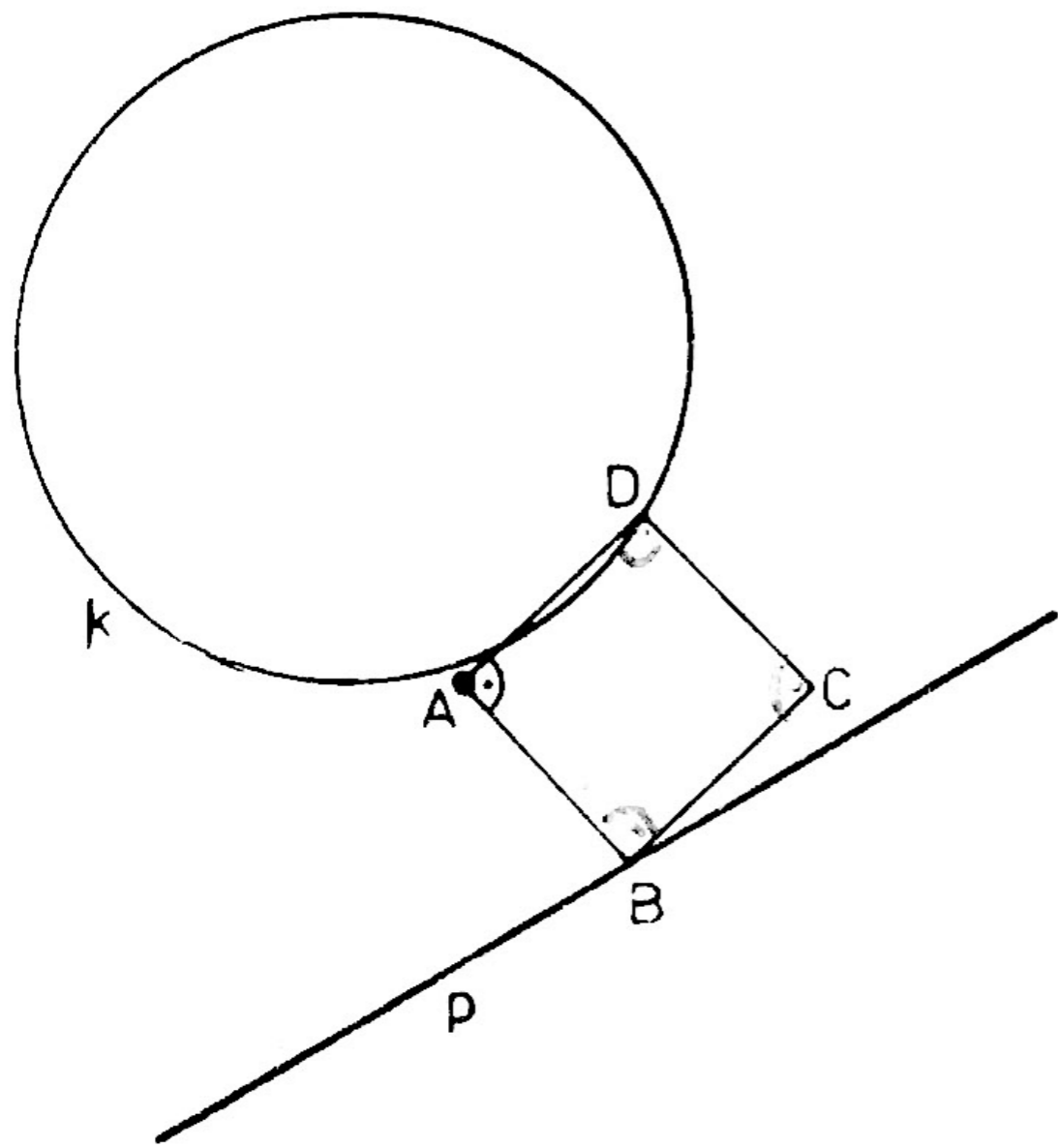
k



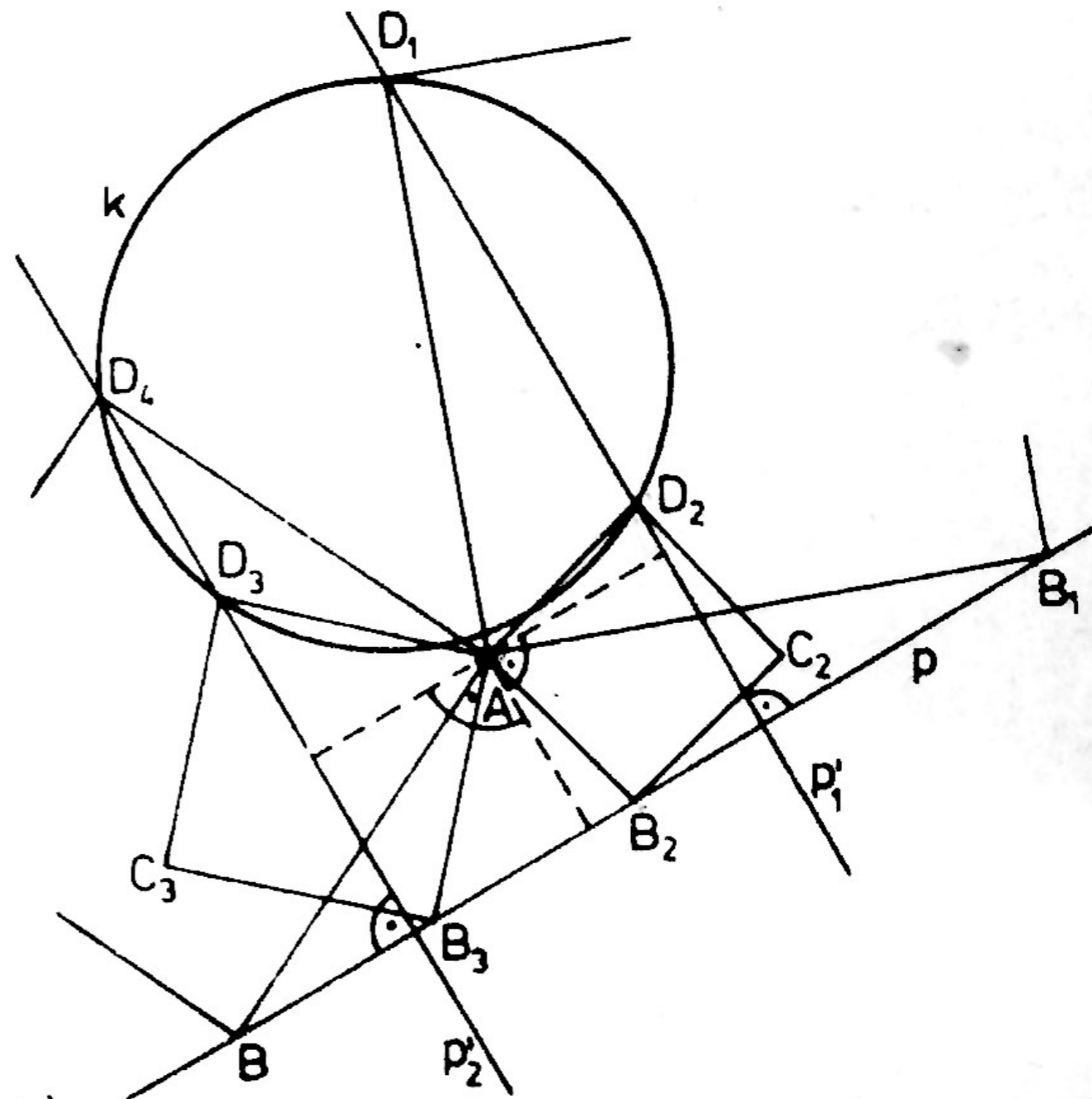
A

P





a)



b)

Bonus:

Daná je úsečka  $|AS| = 6\text{cm}$ . Nайдite všetky trojuholníky  $ABC$ , ktoré majú ťažnicu  $AS$ , uhol  $ACB = 30^\circ$  a  $|AB| = 4\text{cm}$ .

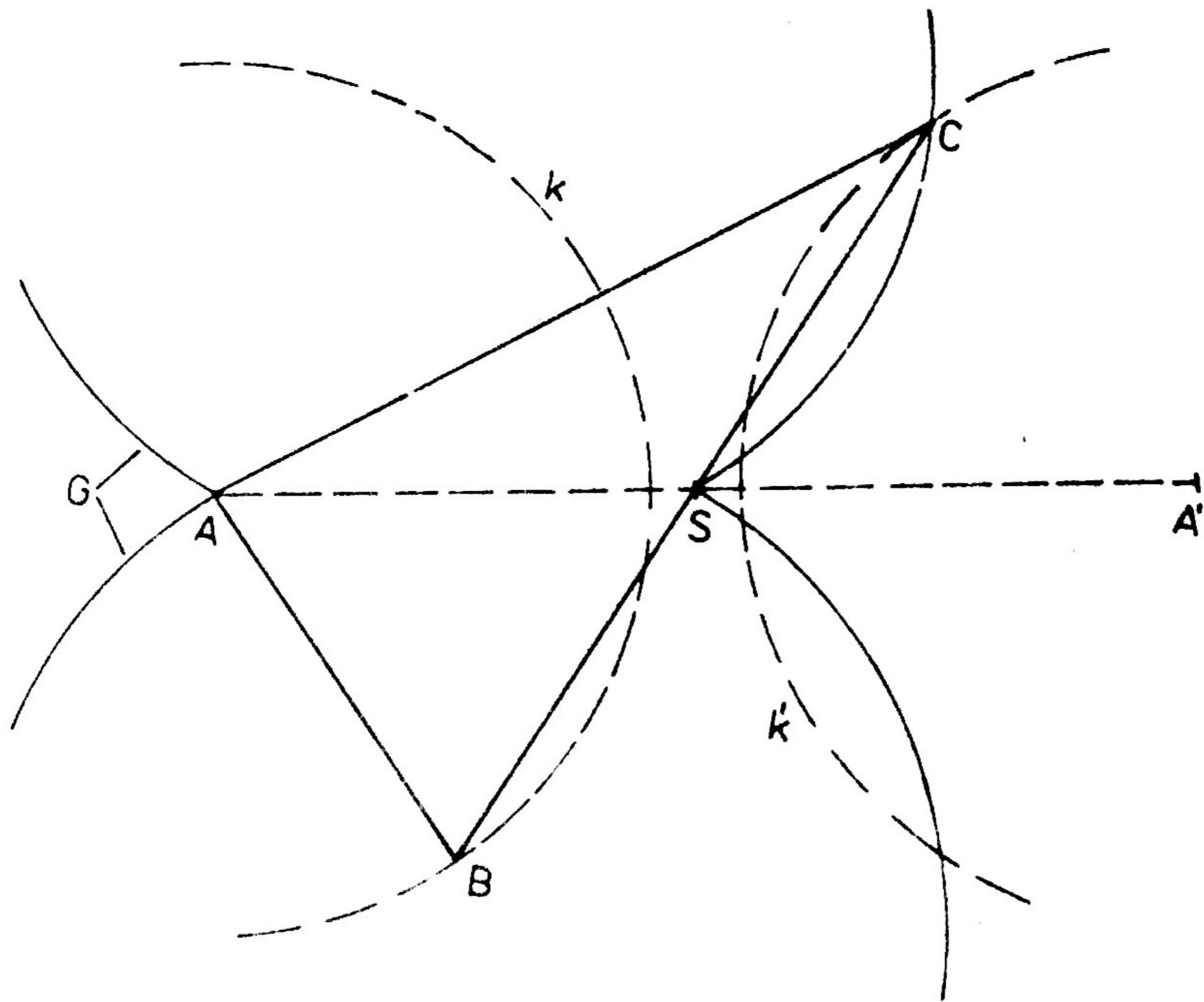
Pomôcka:

B je vzdialené 4 cm od A

B sa zobrazí do C.

Uhol  $ACB = ACS$ .

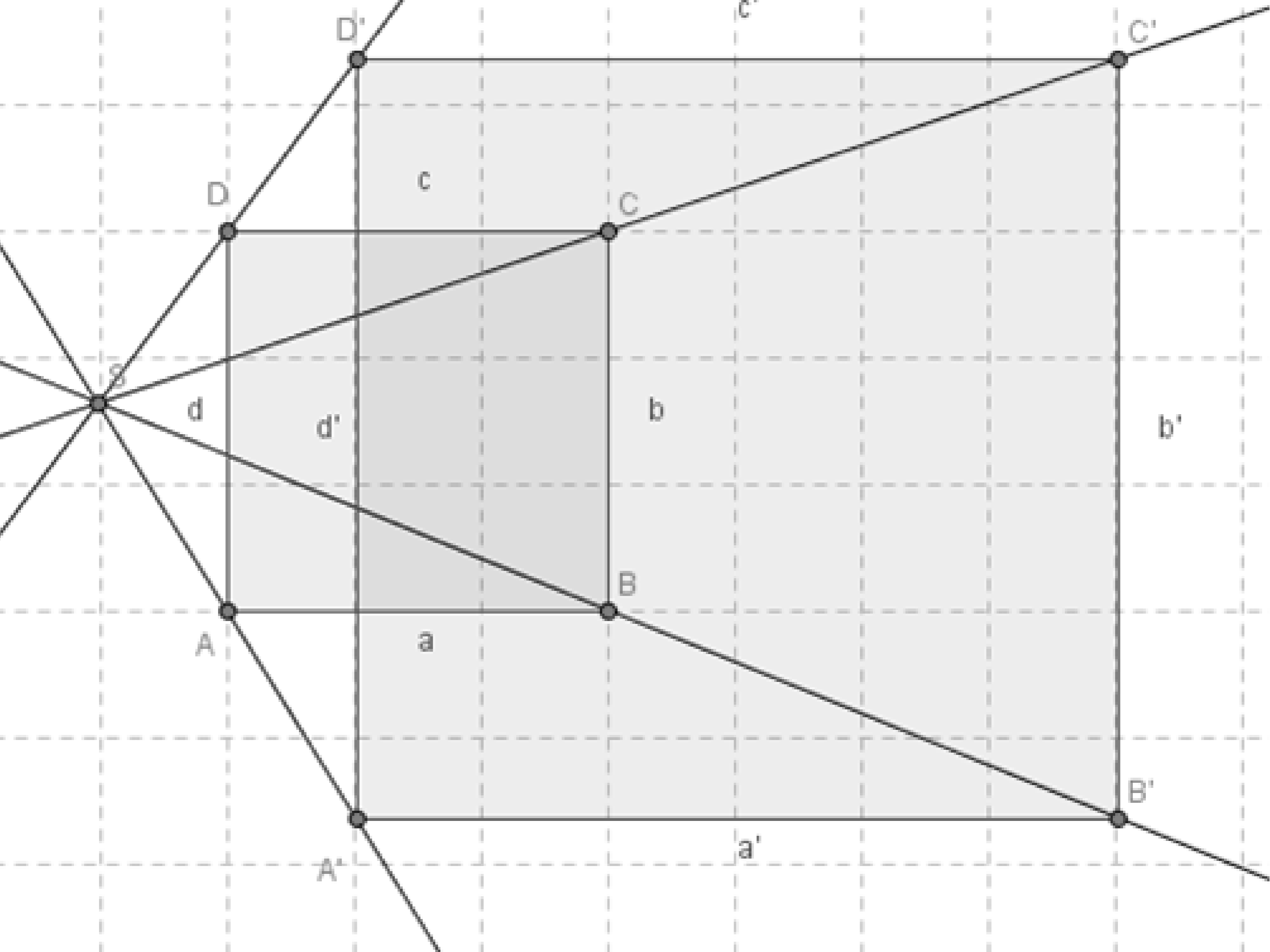
Obvodový uhol ACS k stredovému  $AxS$ .





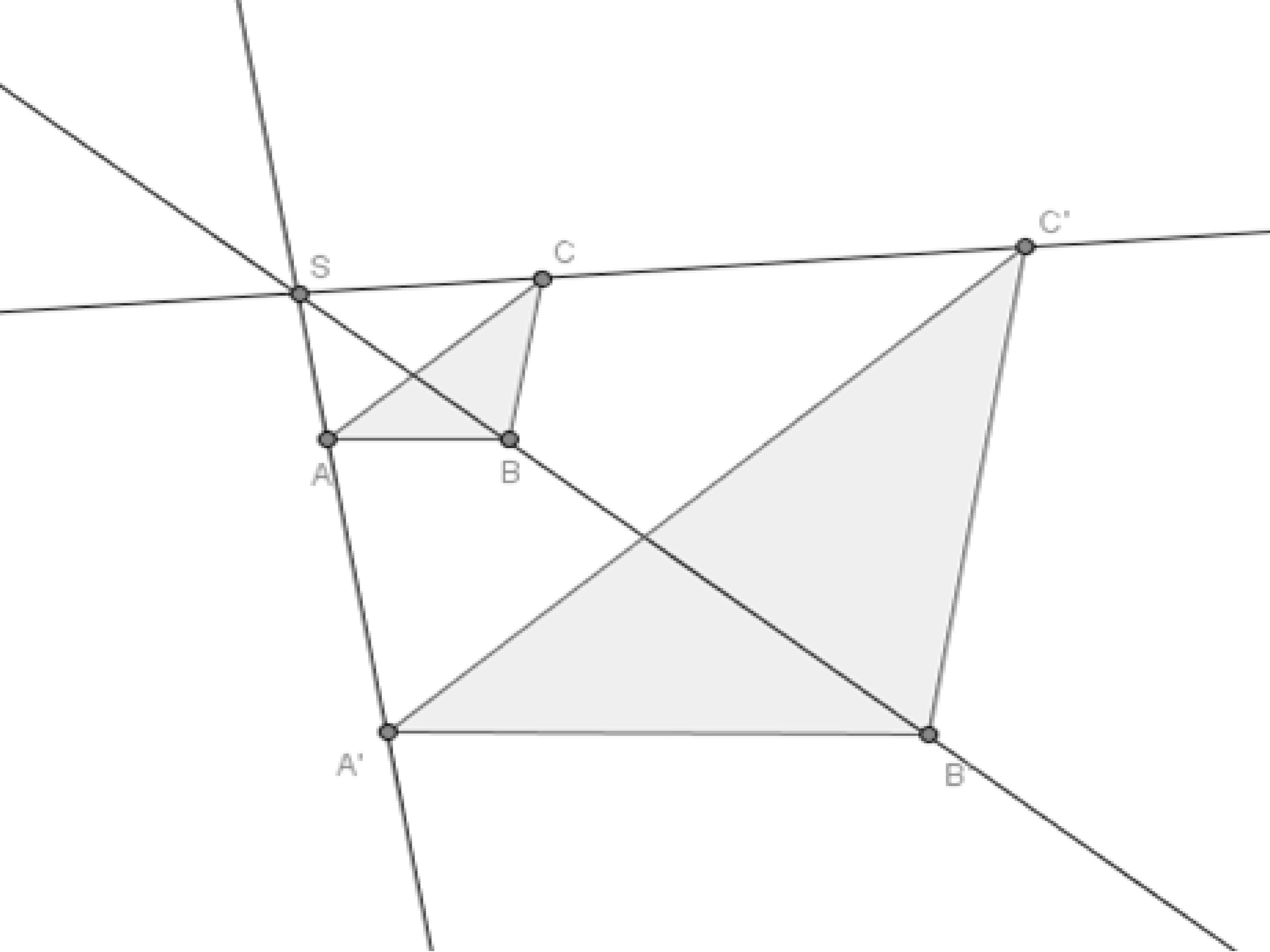
## **Rovnoľahlosť - homotetia**

- podobné zobrazenie (na rozdiel od zhodných zobrazení)
- nezachováva veľkosť - rozmery
- resp. veľkosť zachováva v určitom pomere - koeficient
  
- je jednoznačne daná stredom rovnoľahlosti  $S$  a koeficientom rovnoľahlosti  $k$
  
- ak je koeficient kladný, obraz bodu  $A$  sa nachádza na polpriamke  $SA$
- ak je koeficient záporný, obraz bodu  $A$  sa nachádza na polpriamke opačnej k  $SA$



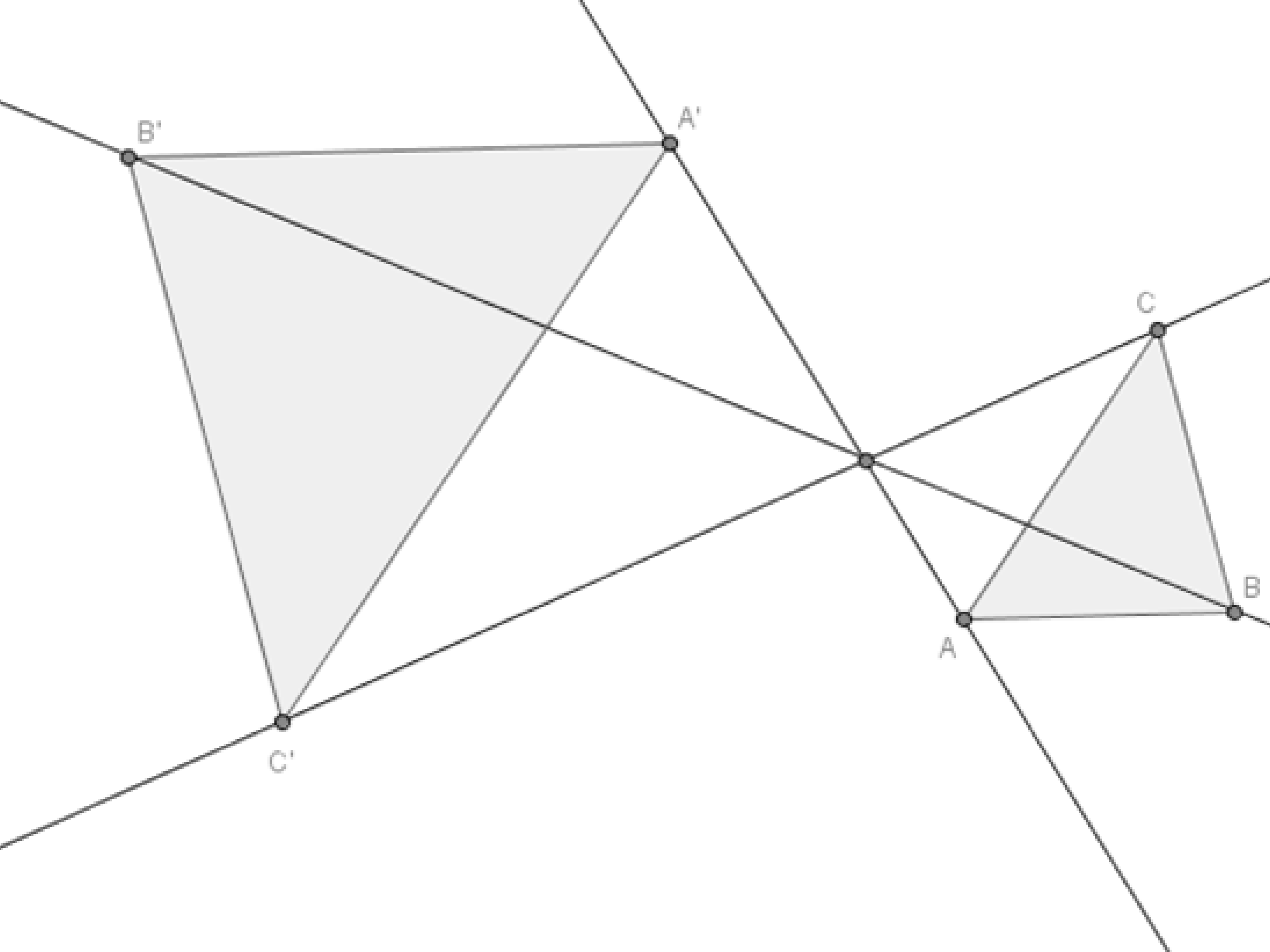
Úloha:

Zostrojte obraz trojuholníka  $ABC$  v rovnobežnosti so stredom  $S$  a koeficientom  $h = 3$ .



Úloha:

Zostrojte obraz trojuholníka  $ABC$  v rovnoláhlosti so stredom  $S$  a koeficientom  $h = -2$ .



Úloha:

Zostrojte obraz pravidelného 6 – uholníka  $ABCDEF$  v rovnoľahlosti so stredom v bode  $B$  a koeficientom  $h = -1,5$ .

