

GEOMETRIA

ZÁKLADY GEOMETRIE V PRESTORE

Časť matematiky, ktorá študuje geometriu priestoru sa nazýva **stereometria**.

Model priestoru, s ktorým budeme pracovať, pozostáva z bodov, jeho najdôležitejšími podmnožinami sú **roviny** (polroviny) a **priamky** (polpriamky).

Vid' tiež "euklidovský priestor", "karteziánska súradnicová sústava" a. i.

Priamka je jednoznačne určená

- dvomi bodmi
- jedným bodom a smerom

Priamky môžu byť v priestore **totožné**, **rovnobežné** (v jednej rovine a žiadny spoločný bod), **rôznobežné** (1 spoločný bod) a **mimobežné** (neležia v jednej rovine a nemajú žiadny spoločný bod).

Rovina je jednoznačne určená

- tromi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží
- dvomi rôznobežnými priamkami

Roviny môžu byť v priestore **totožné**, **rovnobežné** (žiadny spoločný bod), **rôznobežné** (prienikom je spoločná priamka = **priesečnica**).

Úloha:

V akých priestorových vzťahoch sa môžu nachádzať rovina a priamka?

Platí:

Priamka je rovnobežná s rovinou vtedy, keď v nej leží, alebo keď s ňou nemá žiaden spoločný bod.

Ak rovina obsahuje **dve rôznobežné priamky**, ktoré sú rovnobežné s druhou rovinou, tak **tieto roviny sú rovnobežné**.

Úloha:

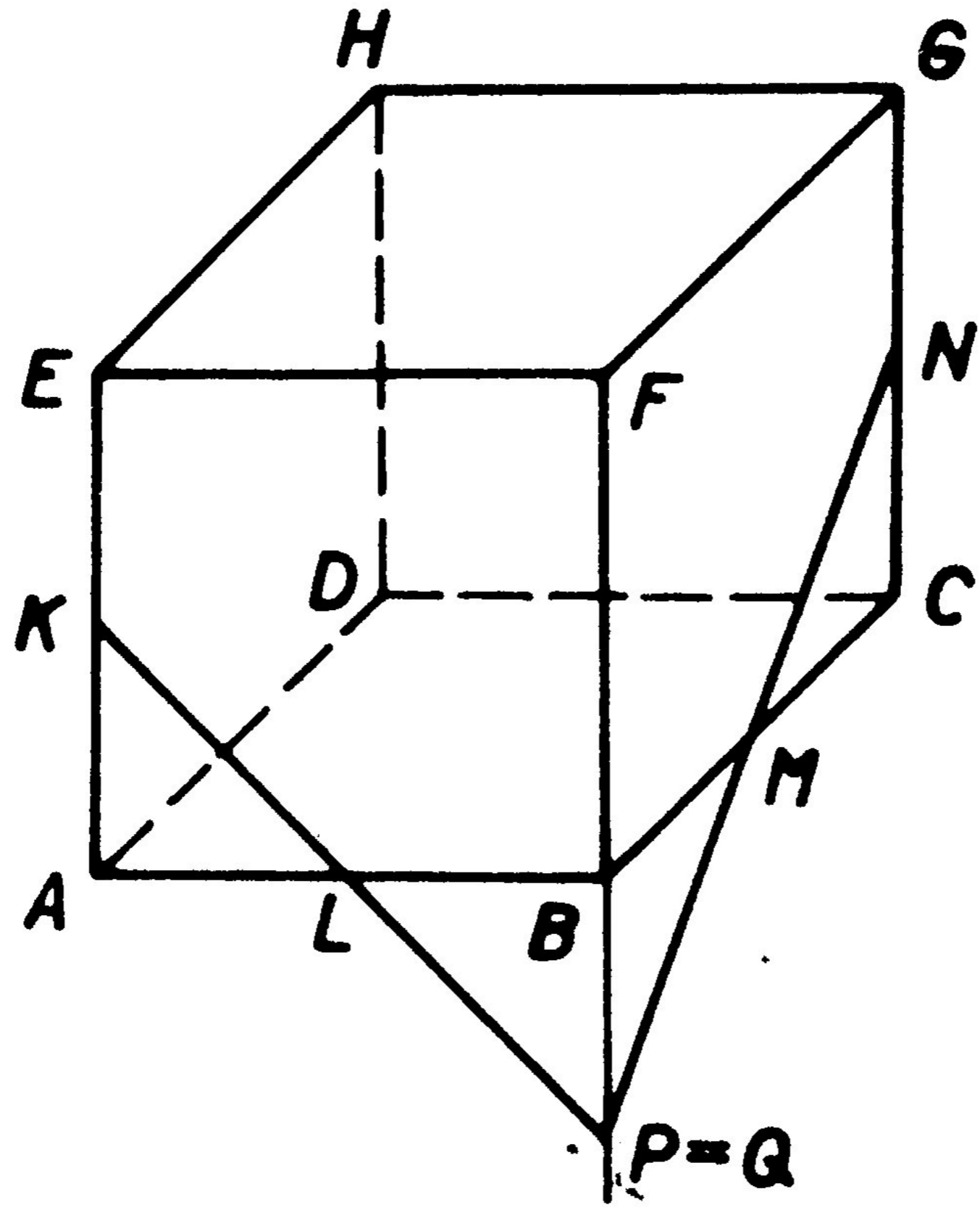
Body K, L, M, N sú stredy strán AE, AB, BC, CG kocky ABCDEFGH. Zistite či

- a) priamka AB leži s bodmi C, D v jednej rovine
- b) body K, L, M, N ležia v jednej rovine
- c) body A, B, E, G ležia v jednej rovine

Úloha*

a) A, B, C, D sú vrcholmi štvorca, preto sú v rovine ABC , v tejto rovine leži aj priamka AB aj body C, D

b) dokážeme, že priamky KL a NM sú rôznobežné (majú len jeden spoločný bod) a tak ležia v jednej rovine (definujú jednu rovinu)



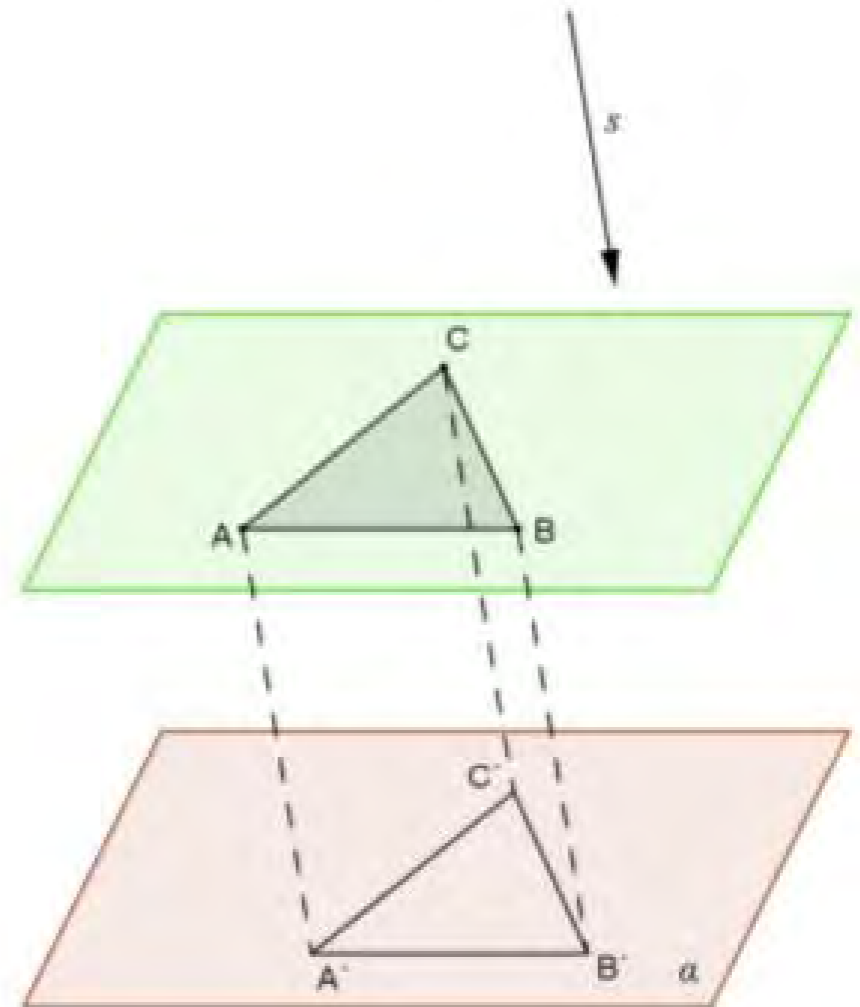
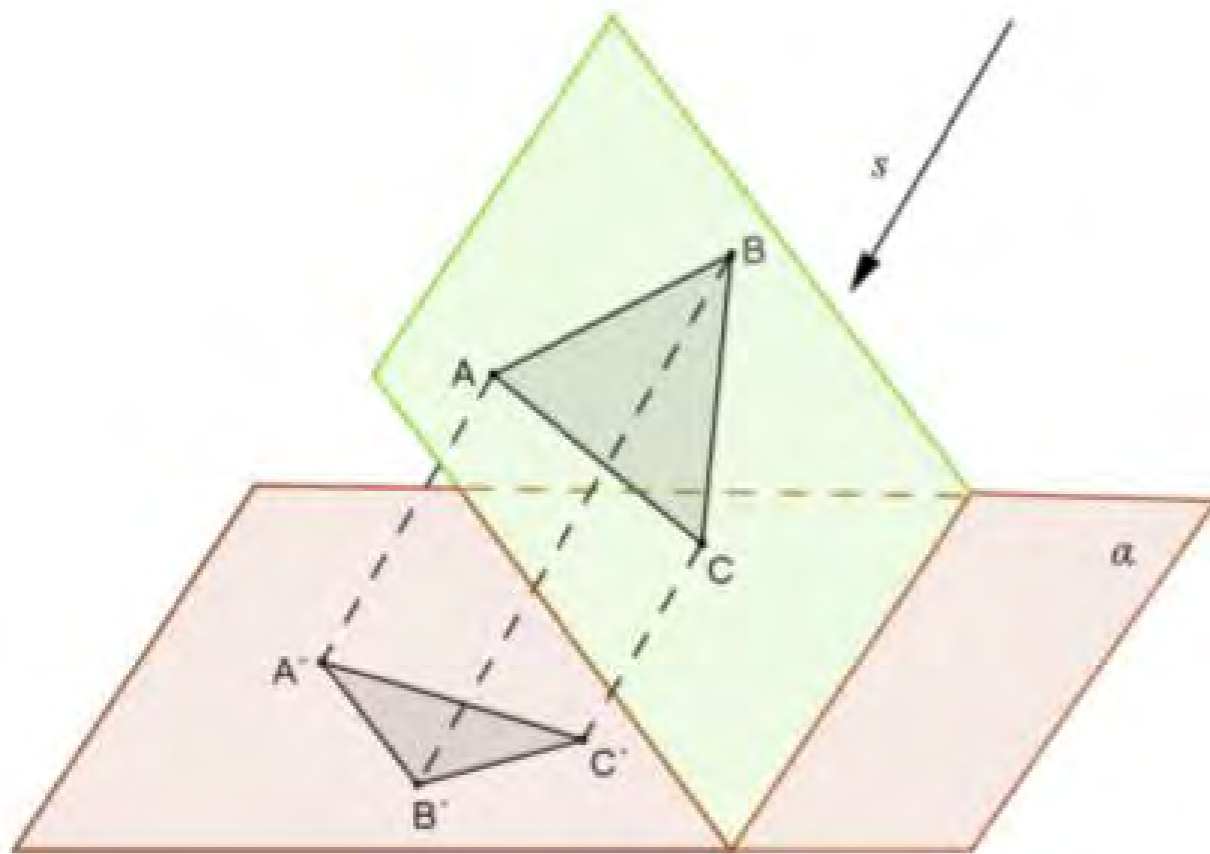
Existujú viaceré metódy (možnosti) ako zobrazit' trojrozmerný priestor do dvojrozmernej roviny. Tieto metódy skúma samostatná matematická disciplína - **deskriptívna geometria**.

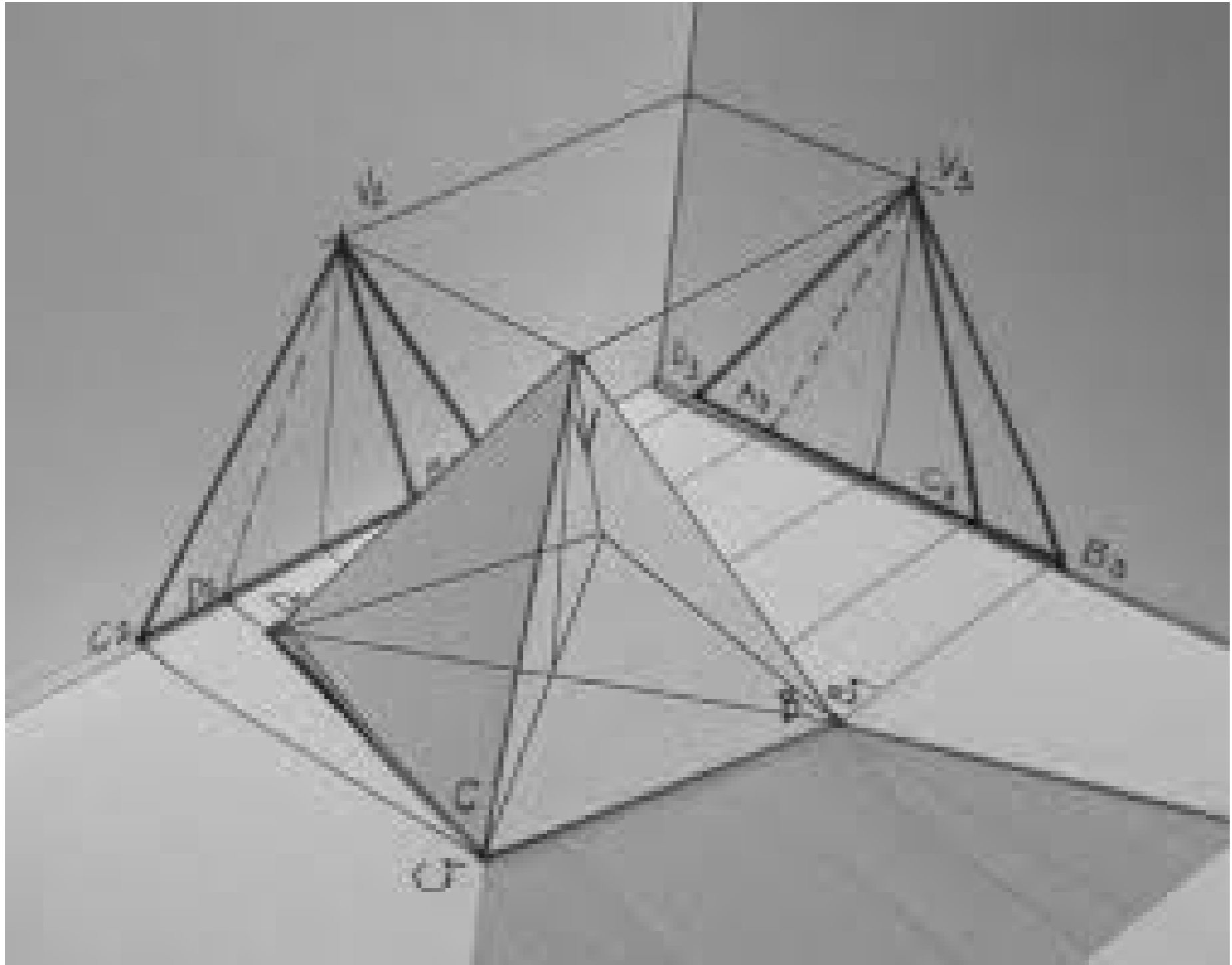
K najjednoduchším patrí tzv. **rovnobežné premietanie**.

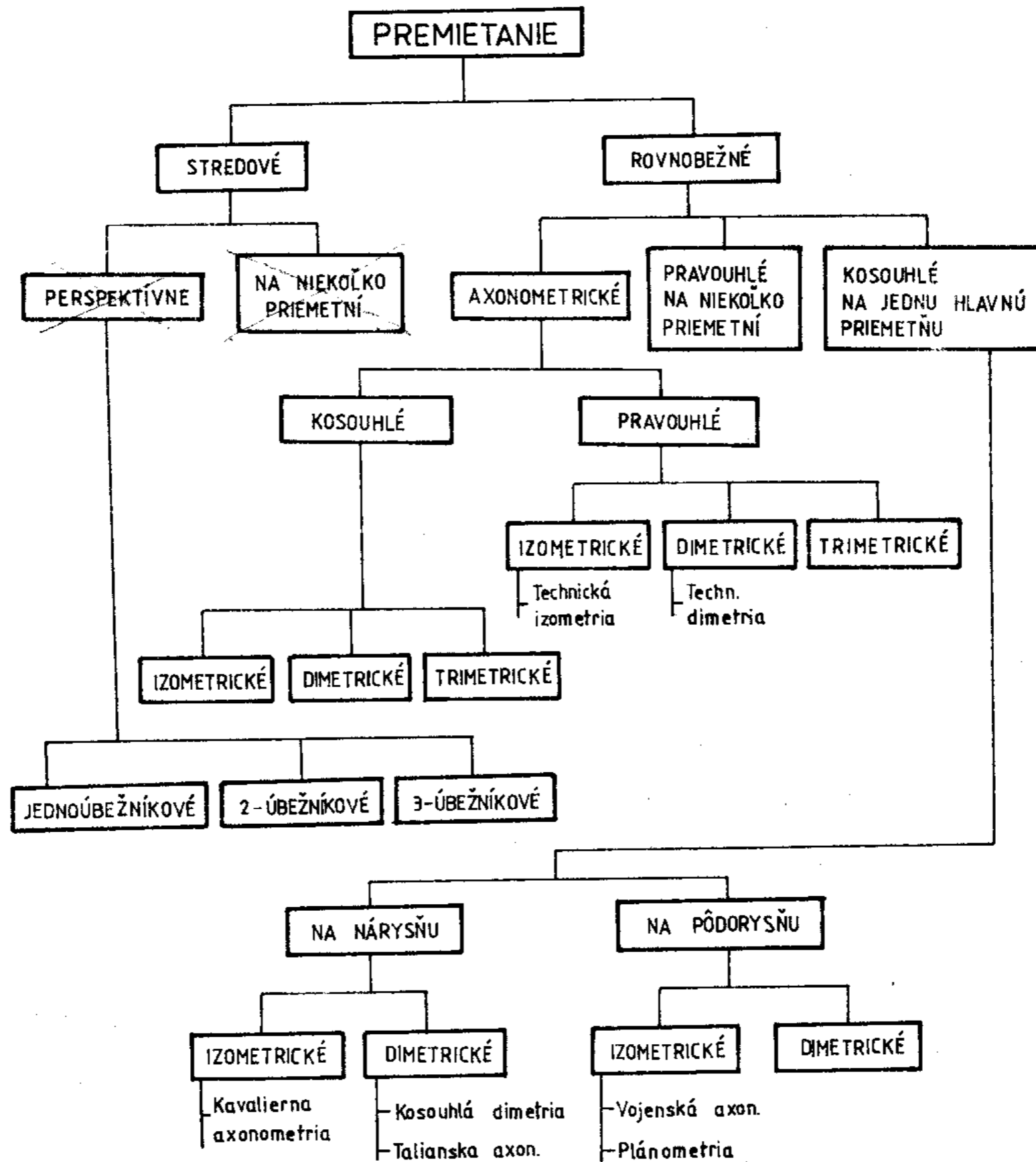
Vid'. tiež: stredové premietanie, kolmé premietanie

Ravnobežné premietanie je určené jednou rovinou, na ktorú sú objekty a útvary premietané - tzv. ***priemetňou*** a smerom premietania **s**.

Priemet ľubovoľného bodu X v ravnobežnom premietaní je priesečníkom **roviny priemetne** a **priamky ravnobežnej so smerom premietania** prechádzajúcej bodom X .



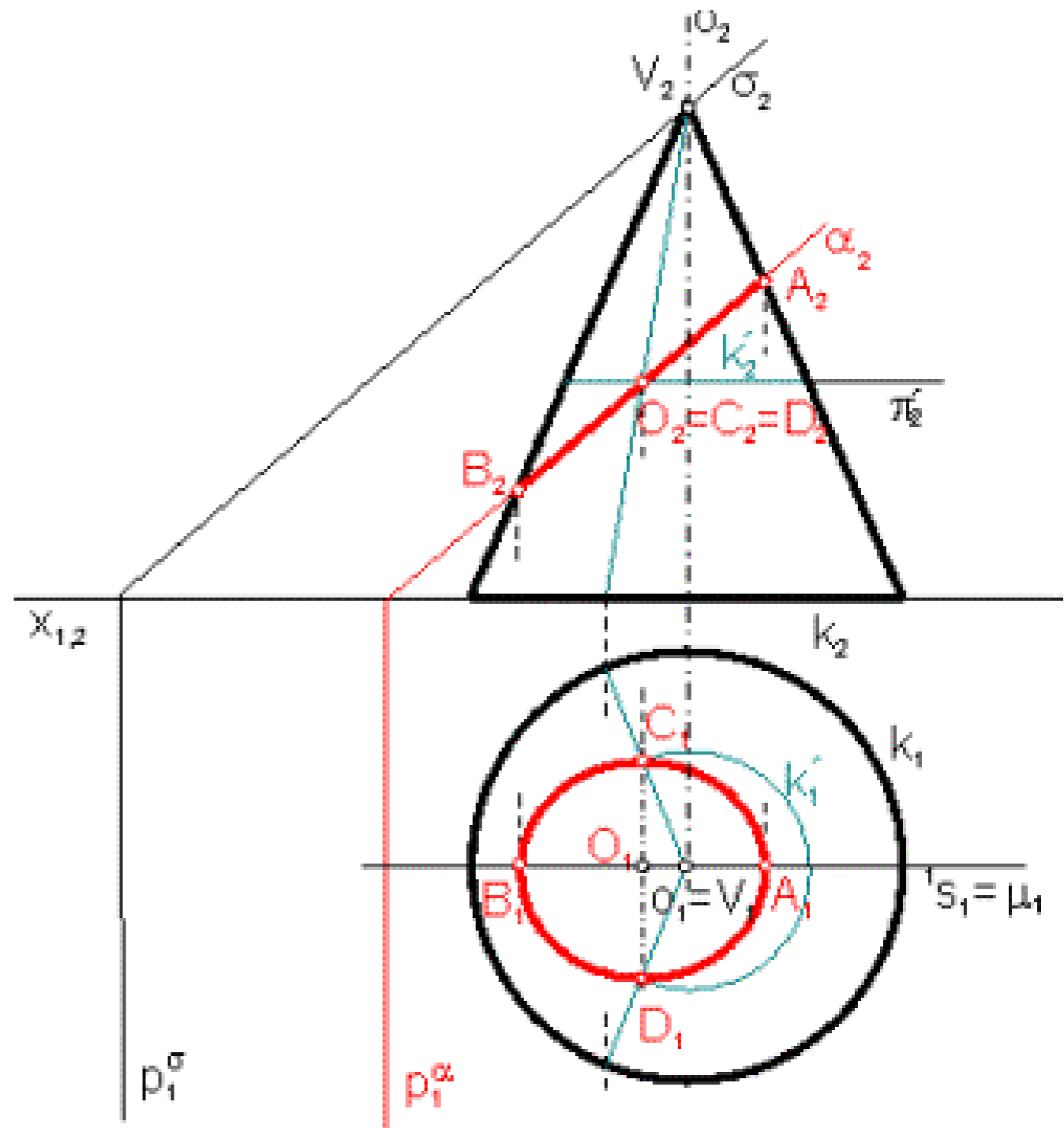
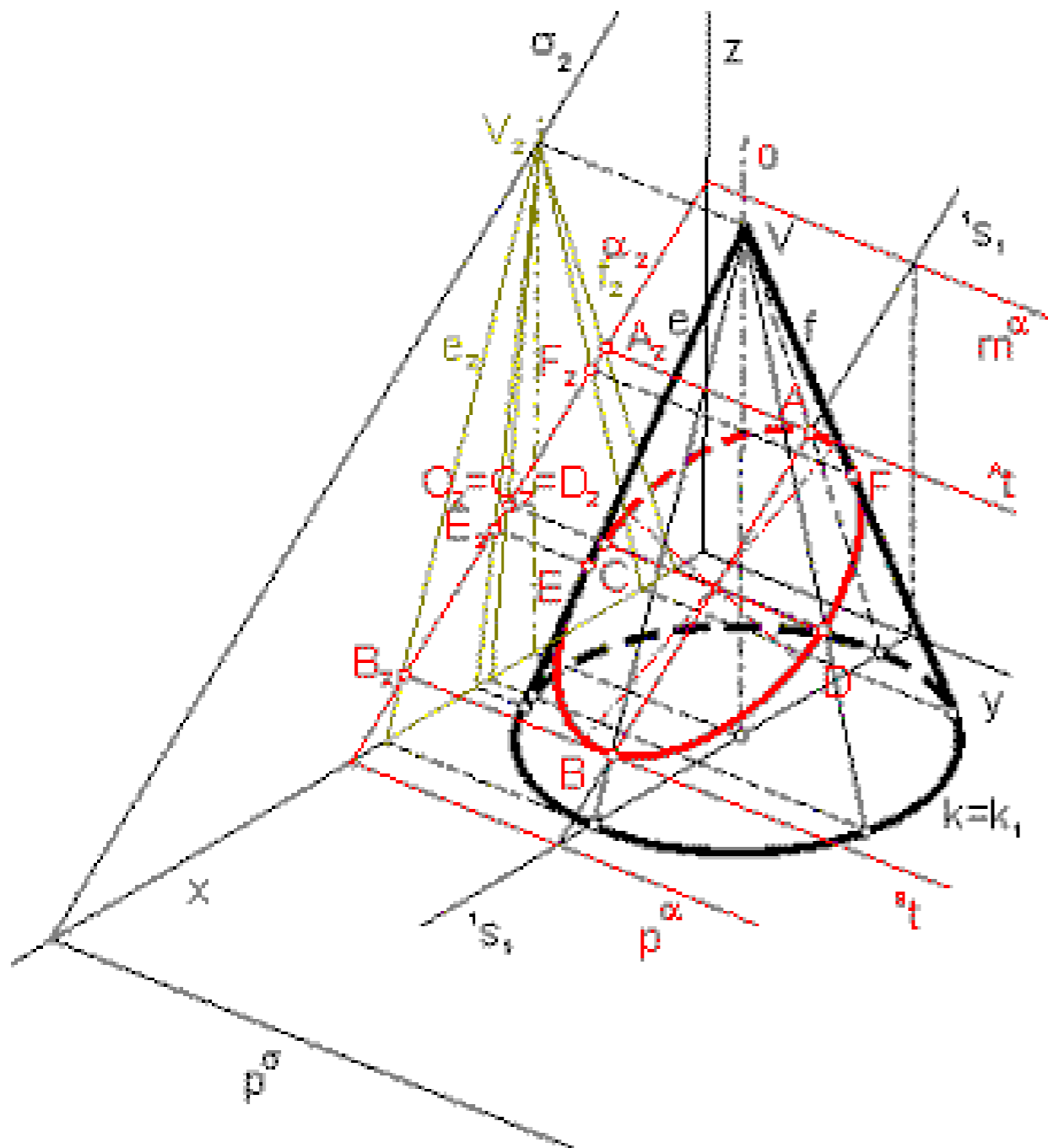




Rezy kocky

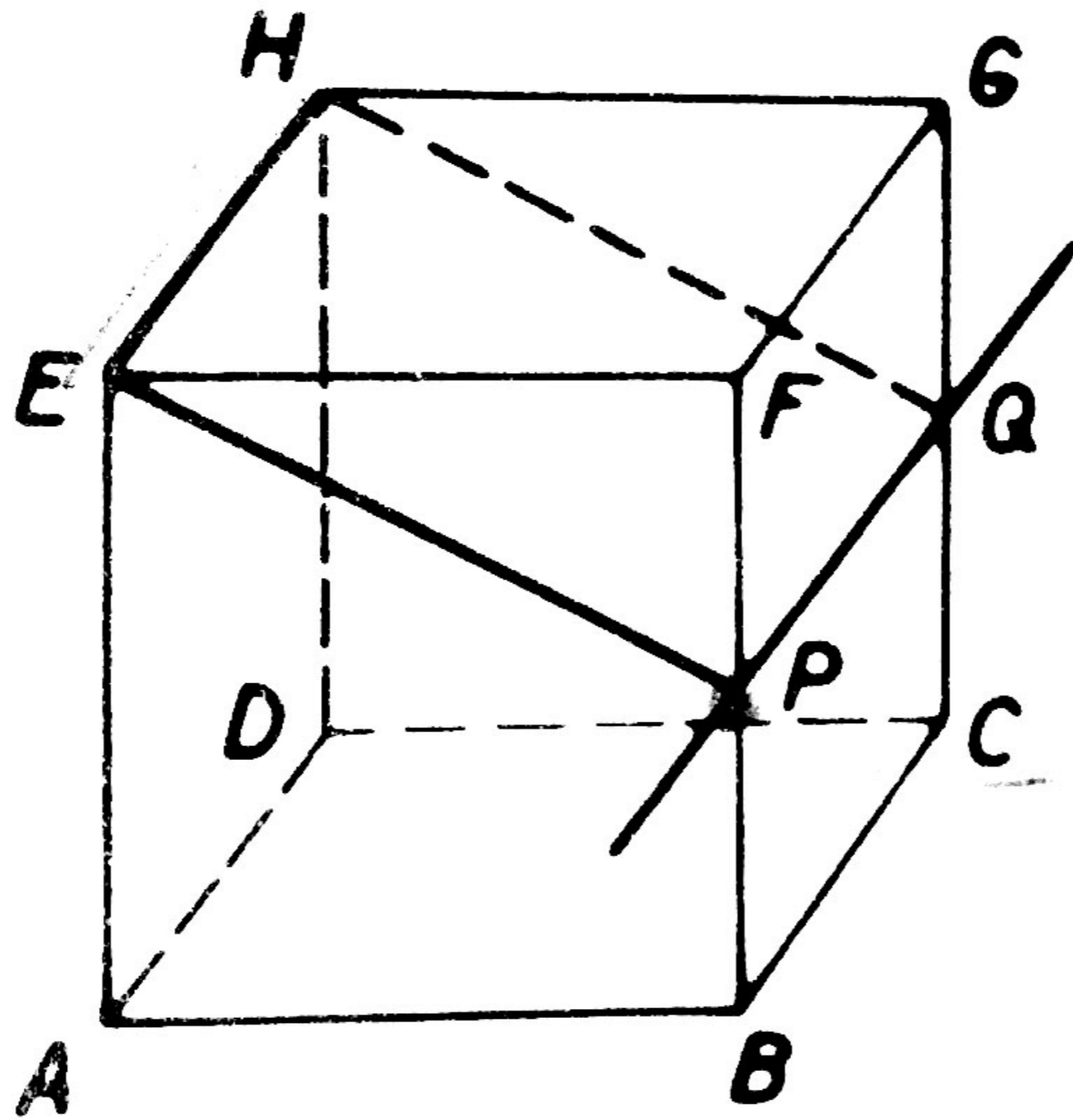
Rez telesa je prienik telesa a **roviny**.

Rez telesom rovinou je rovinný útvar, ktorého hranica je prienik hranice telesa s rovinou rezu.



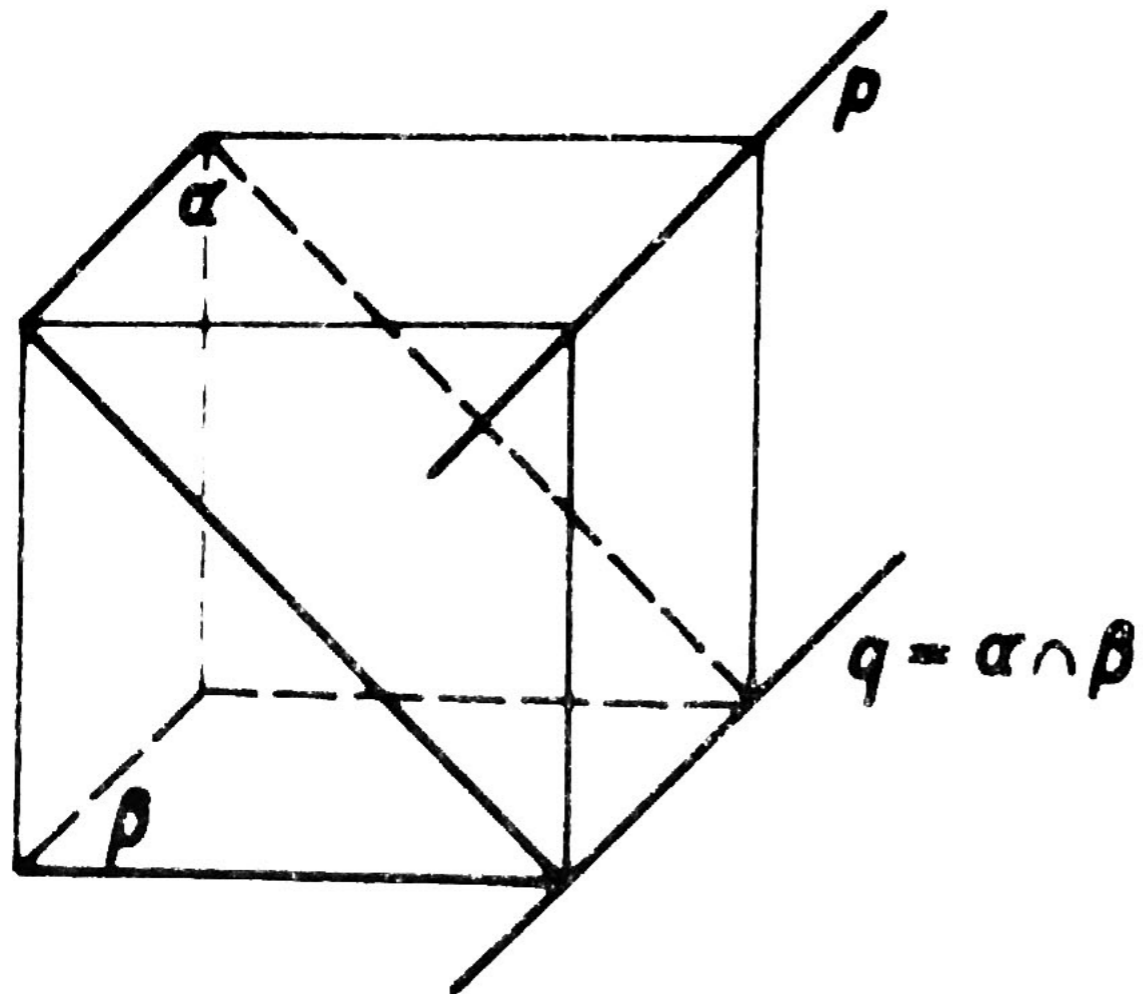
Platí:

Ak je rovina rôznobežná s dvomi rovnobežnými rovinami, tak ich pretína **v rovnobežných priamkach.**

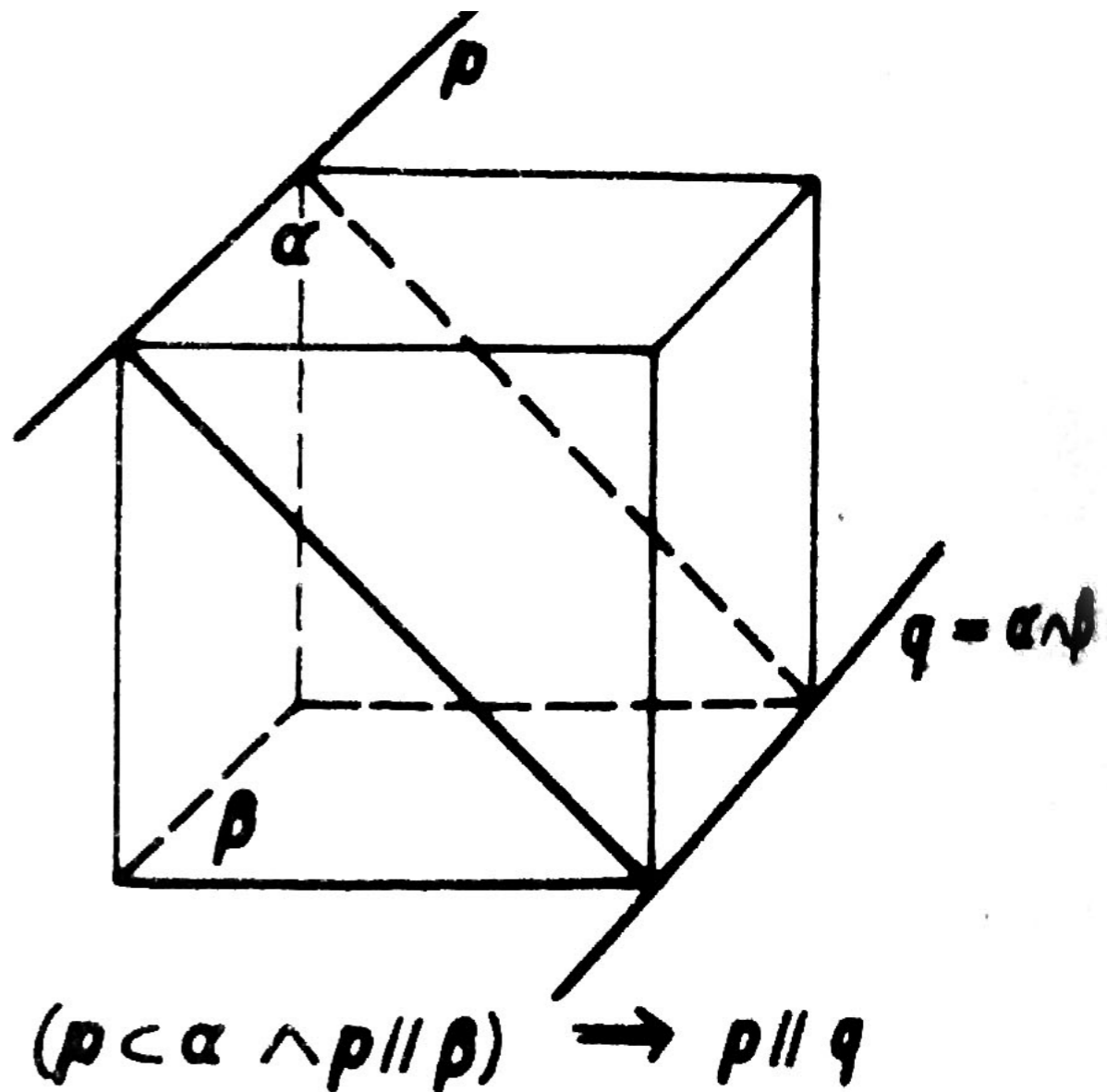


Platí:

Ak je priamka rovnobežná s dvomi rôznobežnými rovinami,
tak je **rovnobežná aj s ich priesečnicou.**



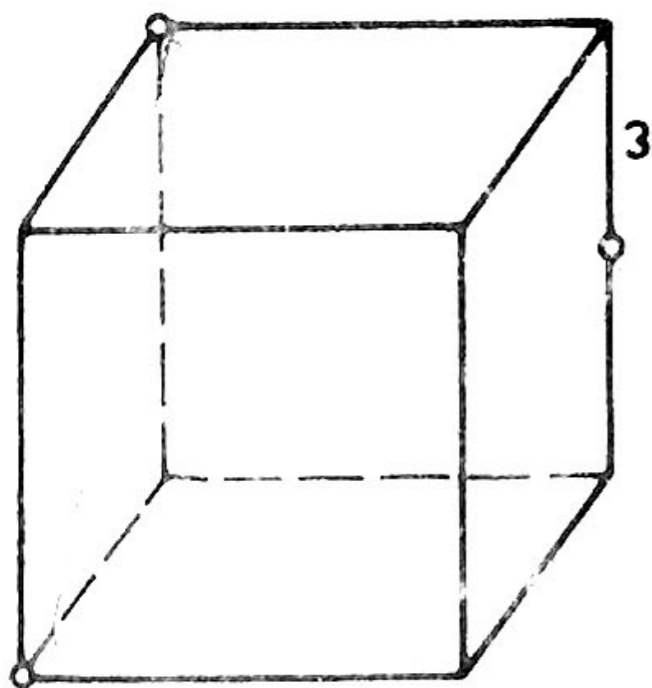
$$(p \parallel \alpha \wedge p \parallel \beta) \Rightarrow p \parallel q$$



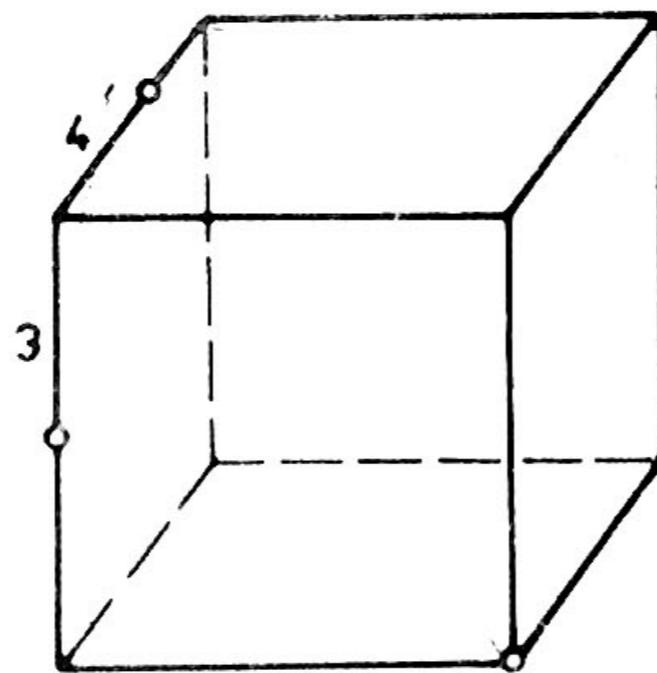
$$(p \subset \alpha \wedge p \parallel \beta) \Rightarrow p \parallel q$$

Úloha:

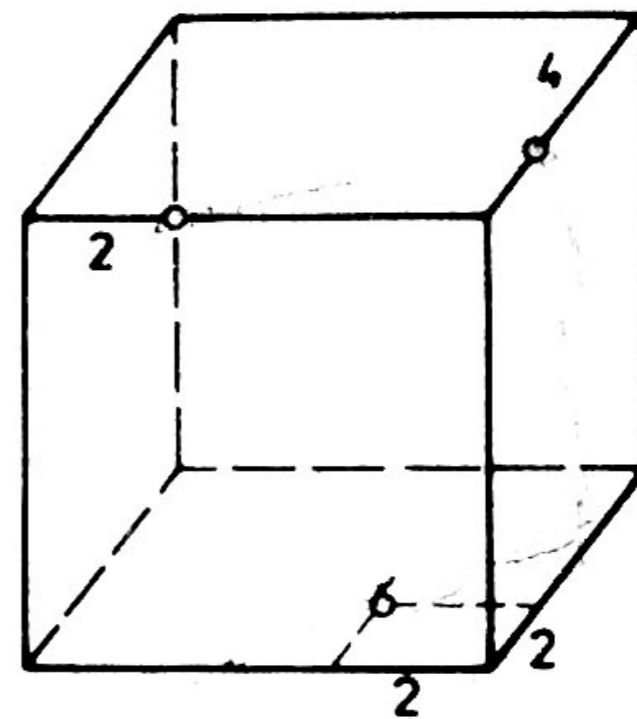
Daná je kocka s hranou veľkosti 6cm. Zostrojte rezy kocky rovinou vyznačenou bodmi:



a)



b)



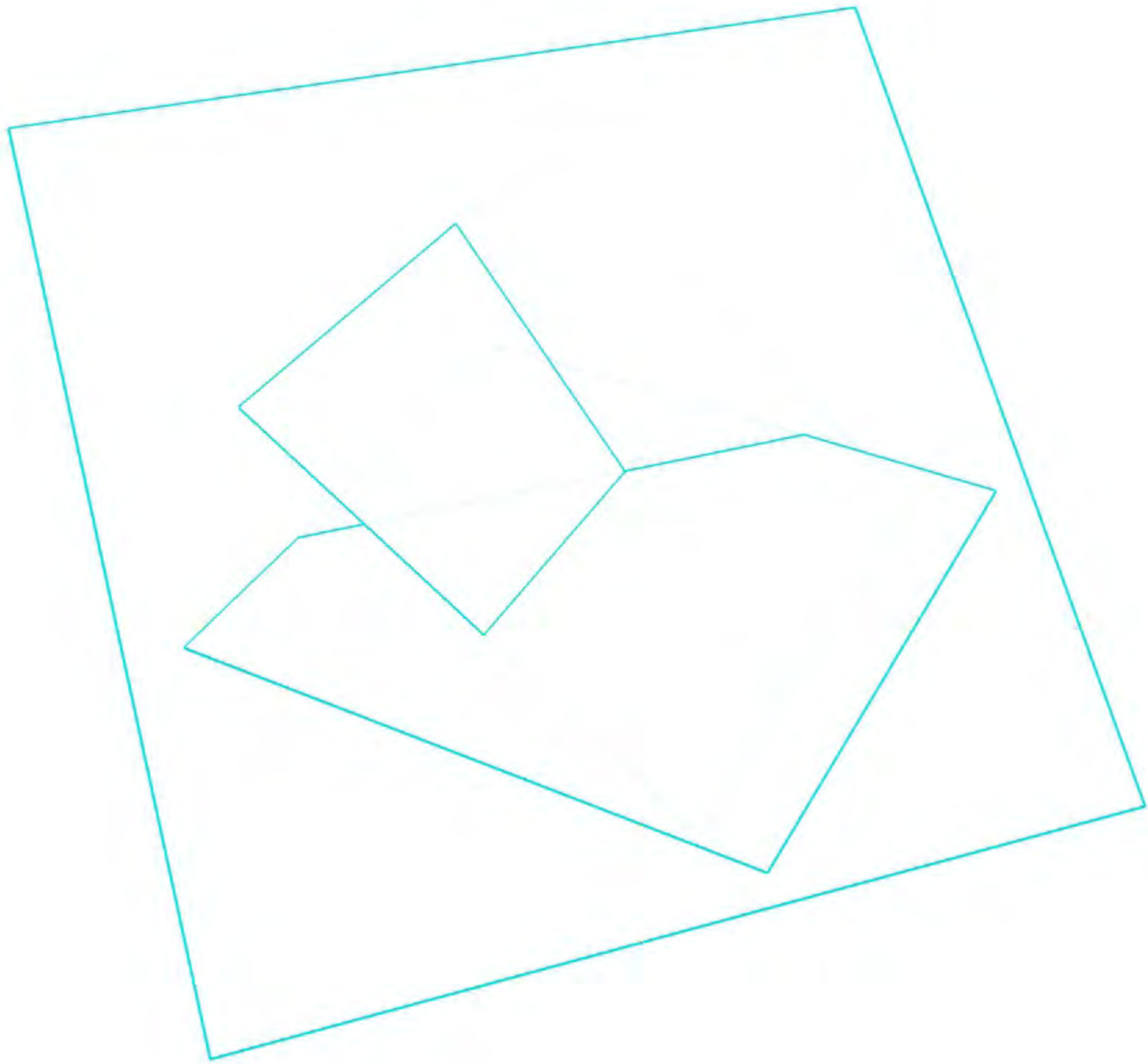
c)

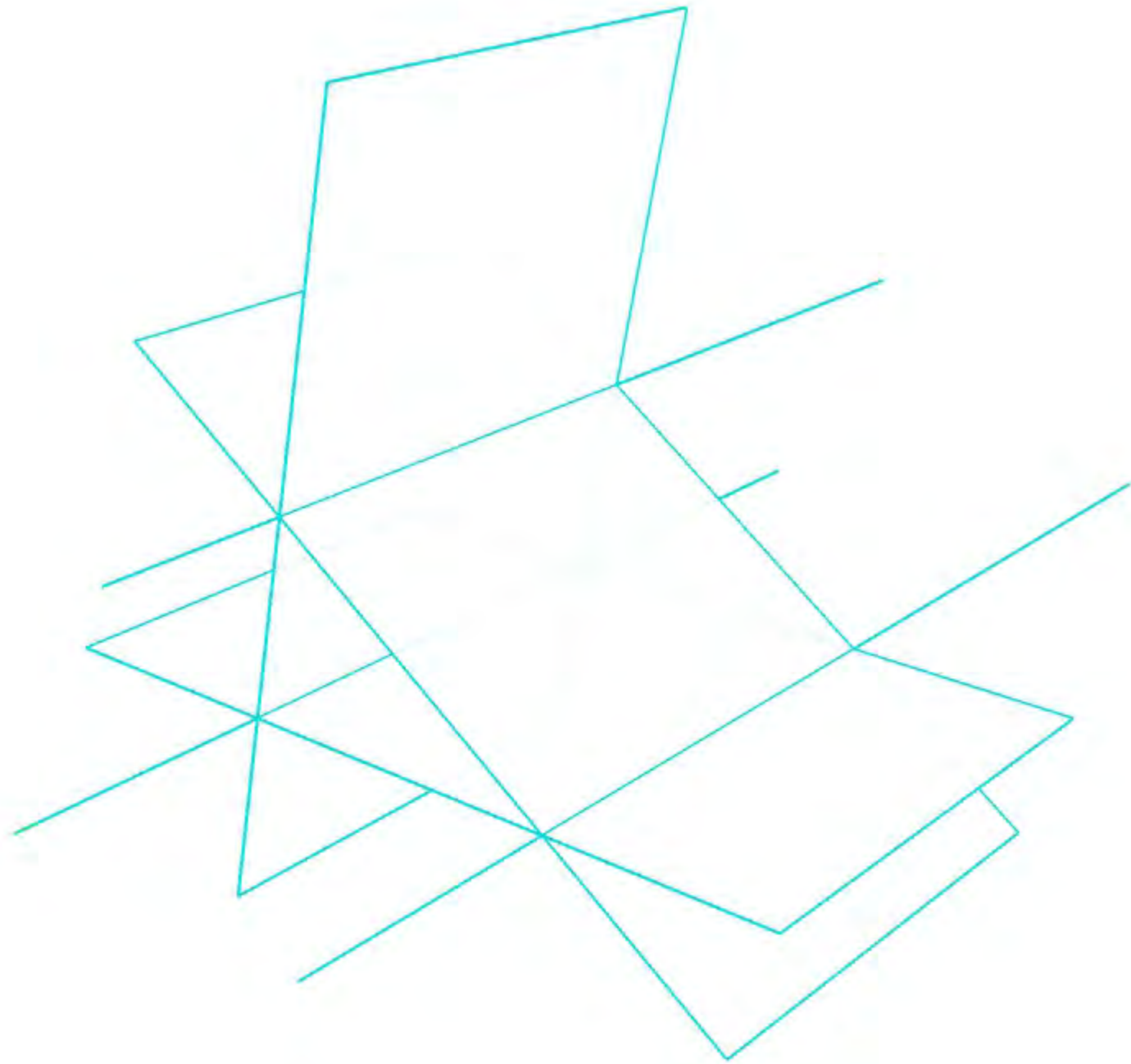
Platí:

Ak máme 3 navzájom rôznobežné roviny tak

a) ak dve z ich priesečníc sú rôznobežné, tak aj tretia priesečnica prechádza prienikom prvých dvoch

b) ak dve z priesečníc sú rovnobežné, tak je s nimi rovnobežná aj tretia priesečnica





Úloha:

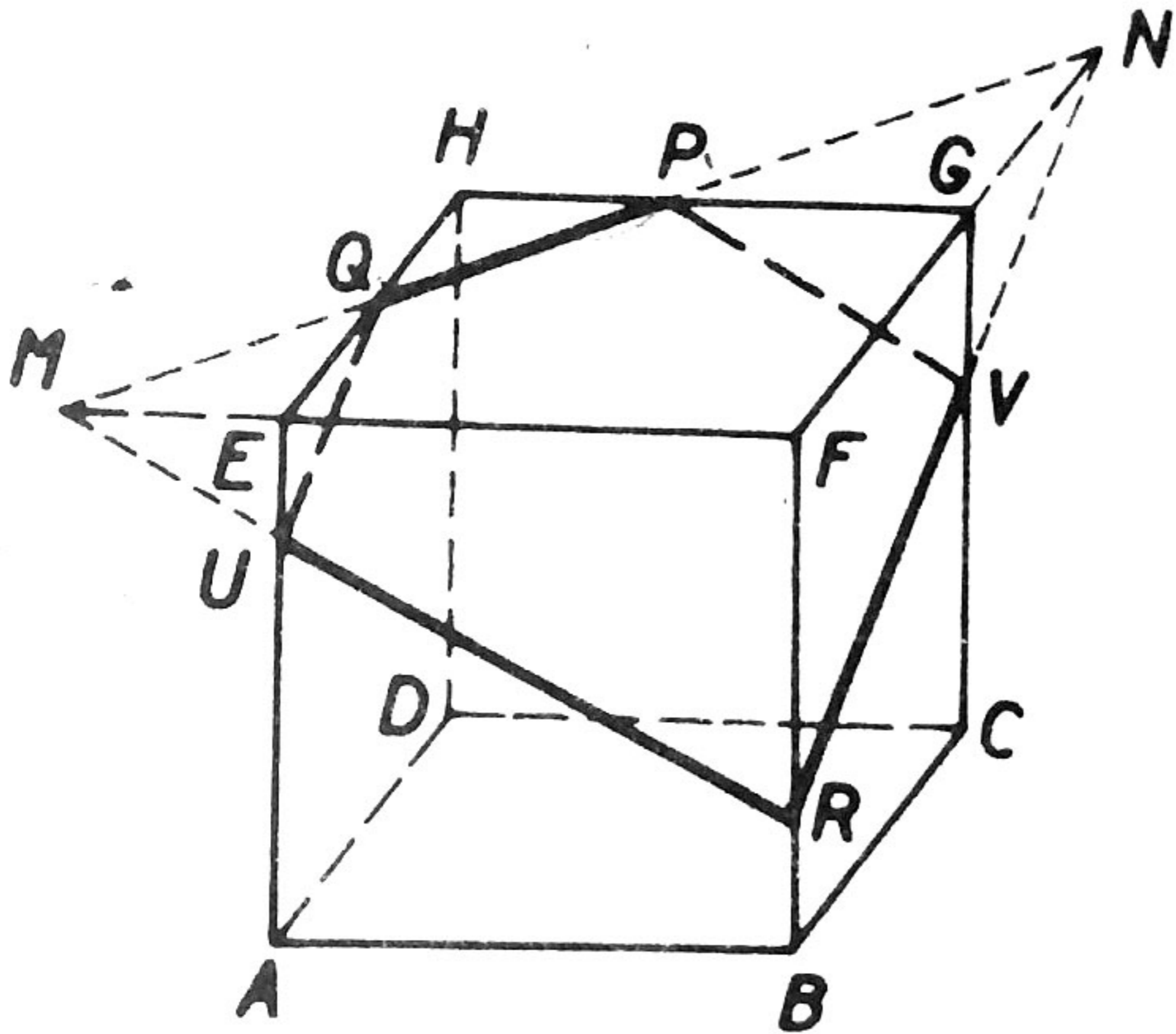
Body P, Q, R sú vnútorné body hrán HG, EH, BF kocky ABCDEFGH. Zostrojte rez kocky rovinou PQR.

Úloha*

Priemik roviny PQR so hornou stenou EFGH je úsečka PQ.

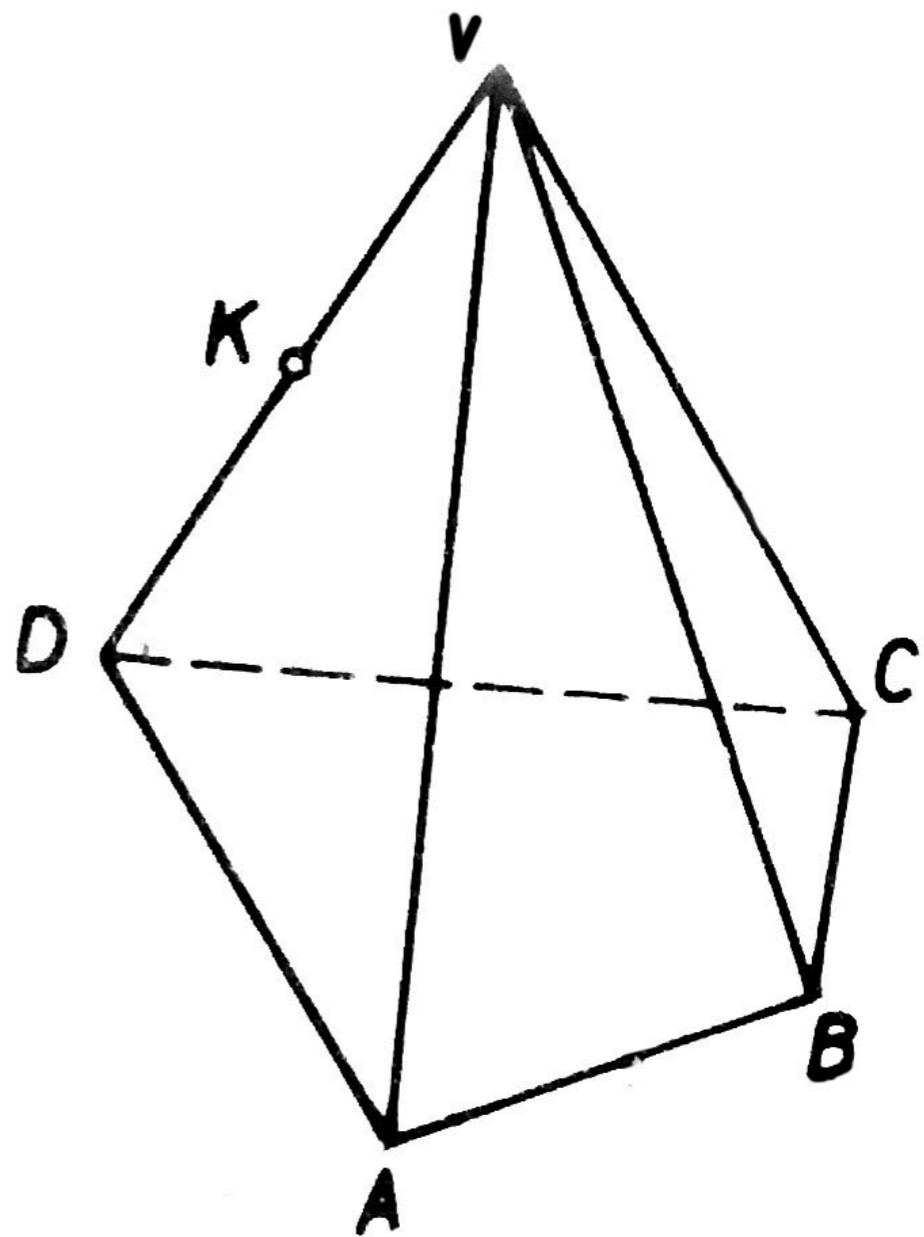
Potrebuje nájsť priemik roviny PQR s bočnou stenou ABFE. Jedným bodom prieniku je bod R, druhý zostrojíme pomocou vlastností troch rovín v priestore (priesečnice rôznobežných rovín sa pretínajú v jednom bode). Použijeme roviny EFG, ABE, PQR. Priesečnicu roviny EFG a rezovej roviny PQR tvorí priamka PQ. Priesečnicu roviny EFG a ABE tvorí priamka EF. Prienikom priesečníc PQ a EF, ktorý označíme ako bod M, musí prechádzať aj priesečnica rovín ABE a PQR ktorú hľadáme (priesečnicu tvorí priamka RM).

Obdobný postup použijeme pre zostrojenie prieniku rezovej roviny so stenou BCGF.



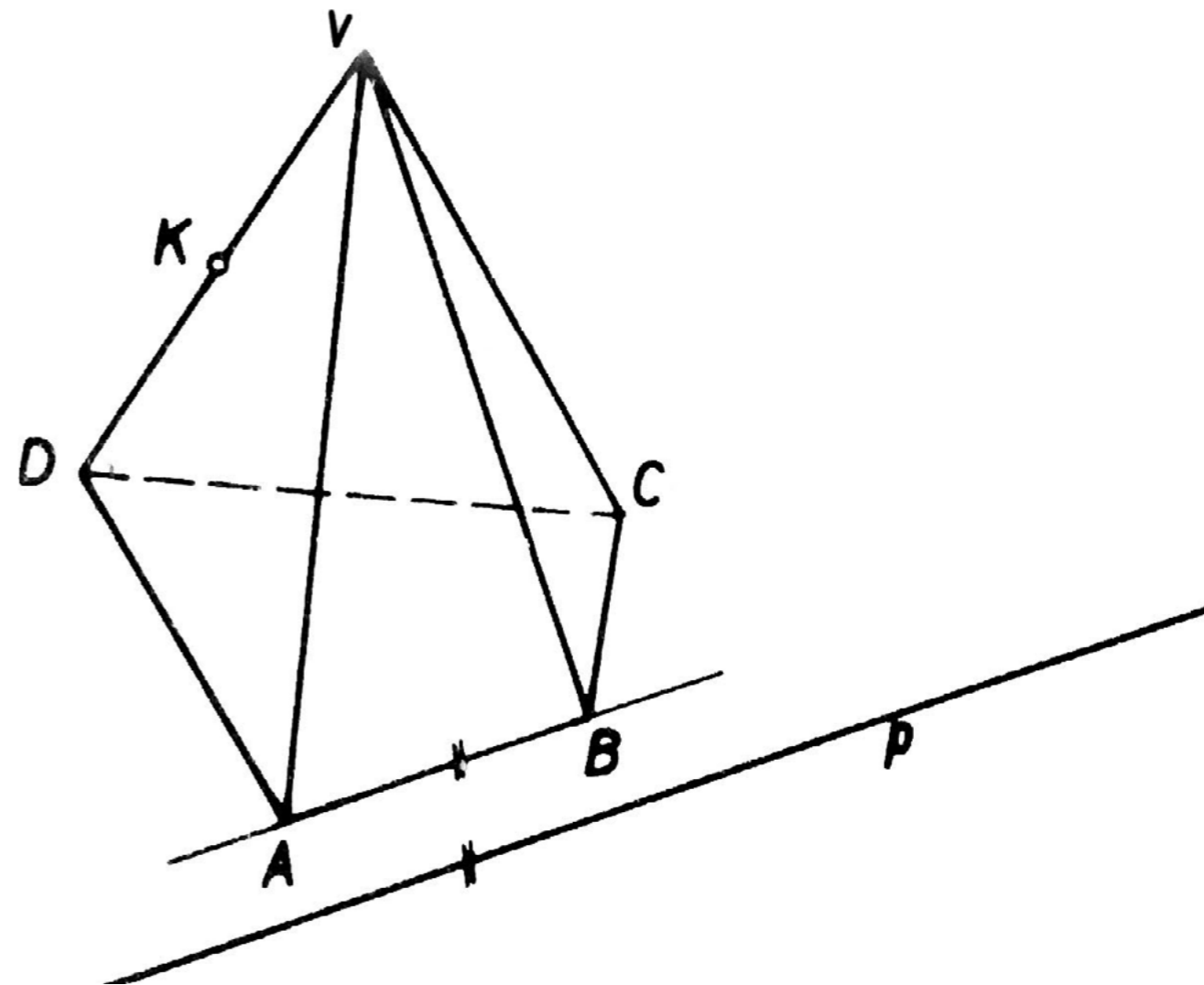
Úloha:

Zostrojte rez štvorbokým
ihlanom $ABCDV$ rovinou
 ABK .



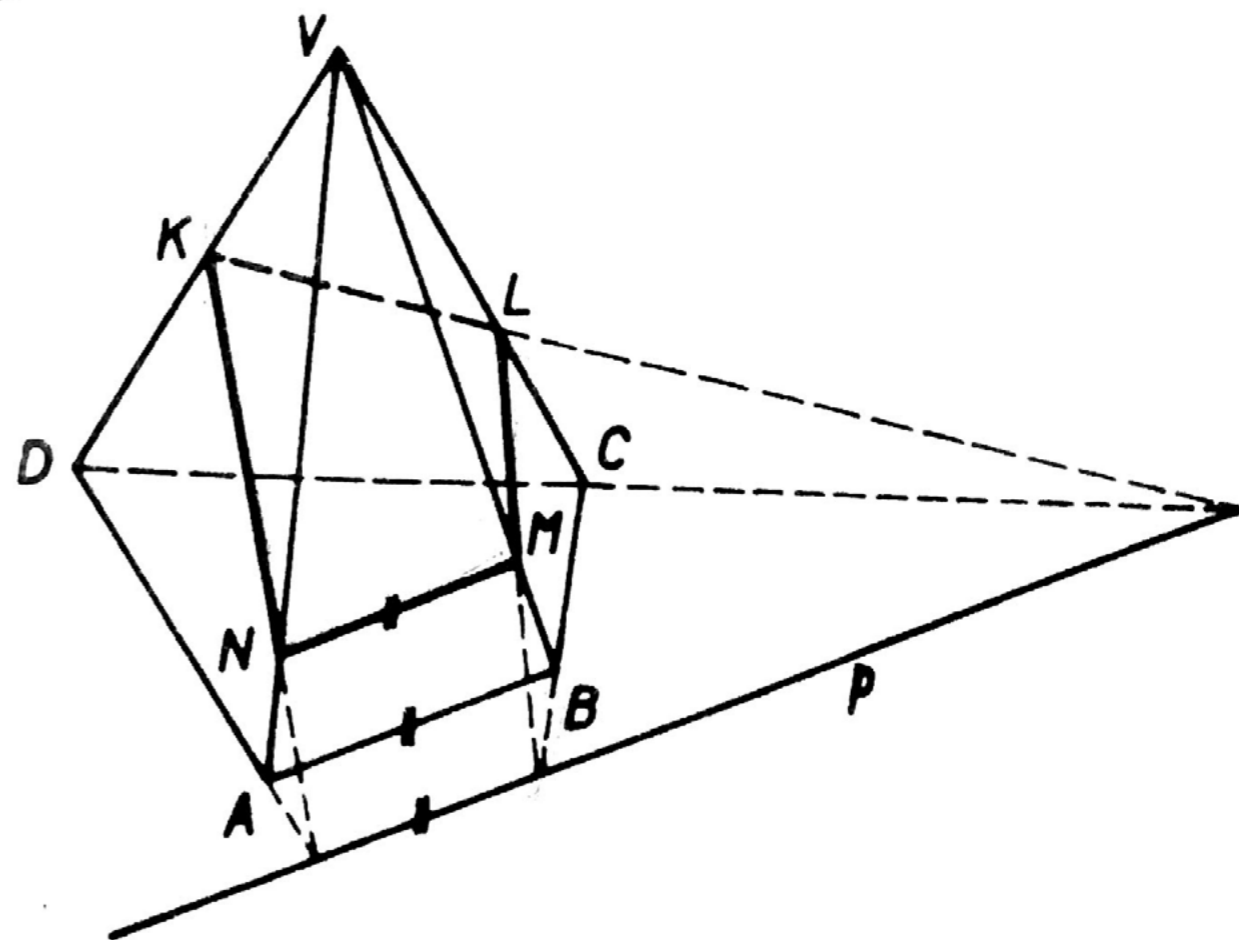
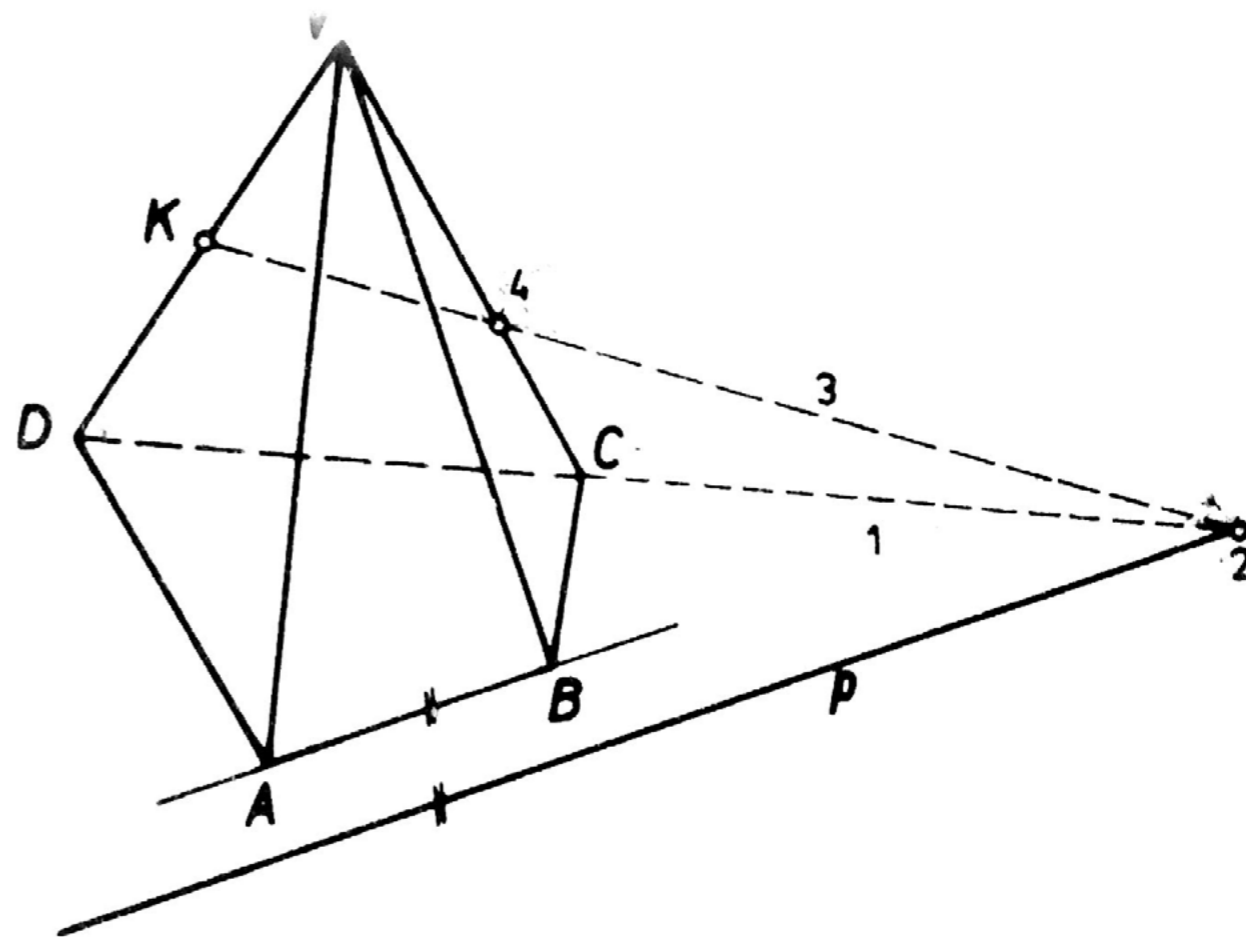
Úloha:

Zostrojte rez štvorbokým
ihlanom $ABCDV$ rovinou
 pK .



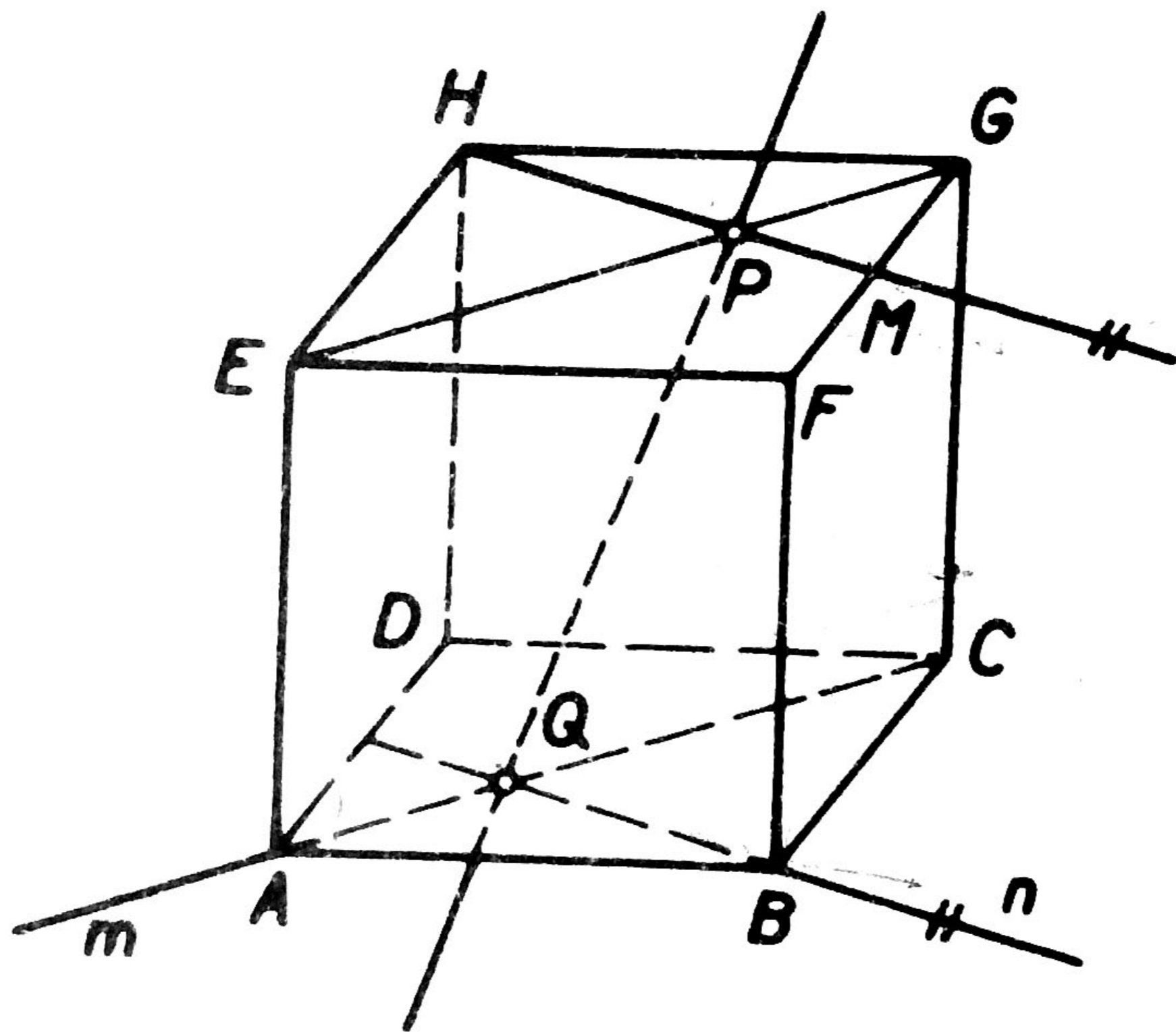
Úloha*

Vychádzajme z toho, že si uvedomíme, že priesečnice rovín pK , ABC a CDV sa pretínajú v jednom bode (keďže tieto 3 roviny sú vzájomne rôznobežné).



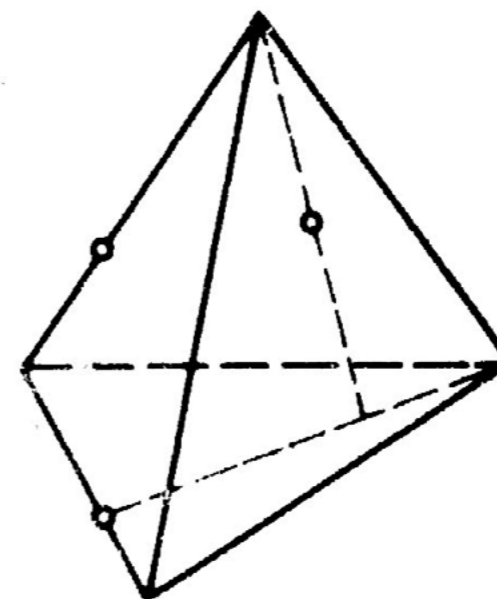
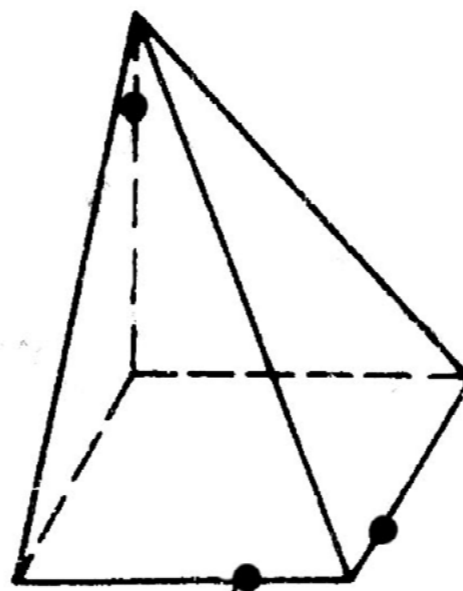
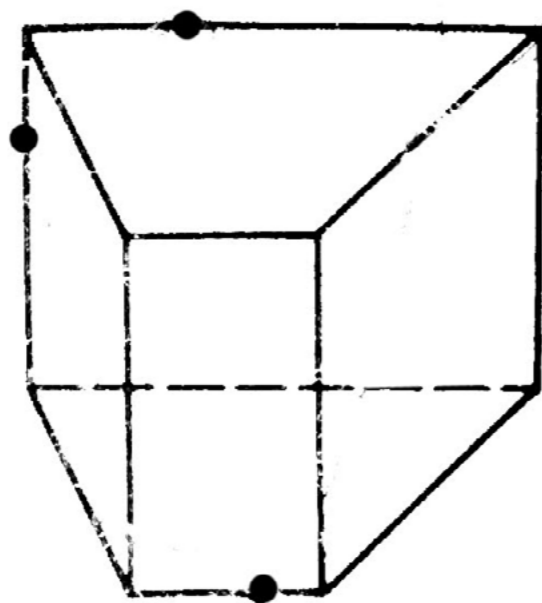
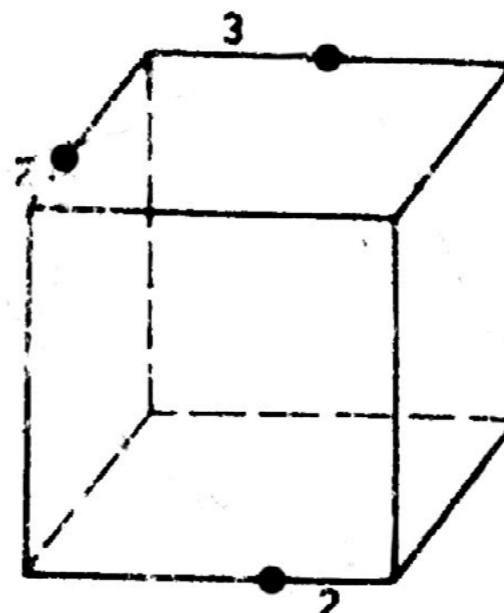
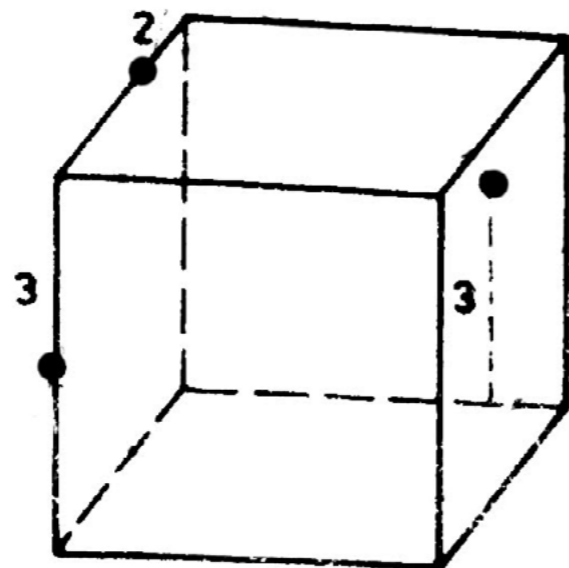
Úloha:

Bod M je v strede hrany FG kocky $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečnicu rovín AEC a HMB .



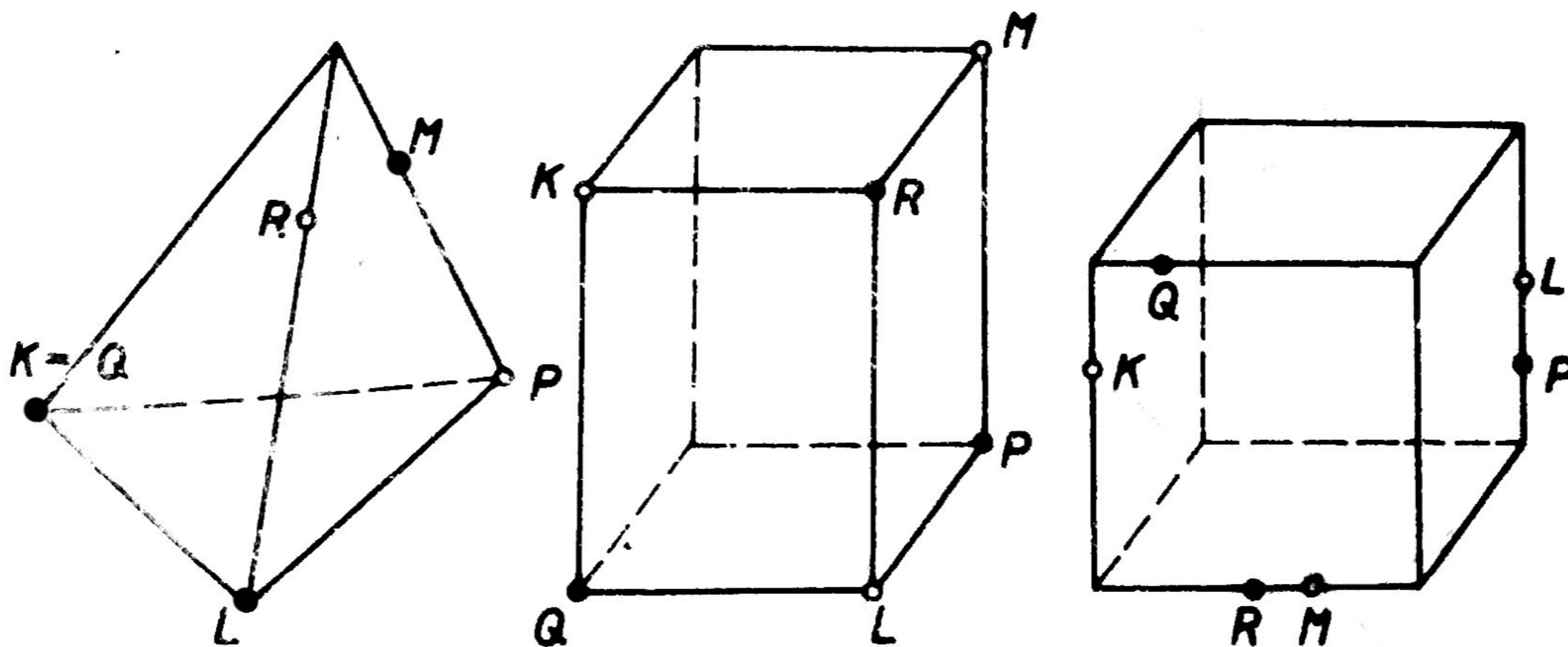
Úloha:

Zostrojte rezy telies rovinou vyznačenou bodmi:



Úloha:

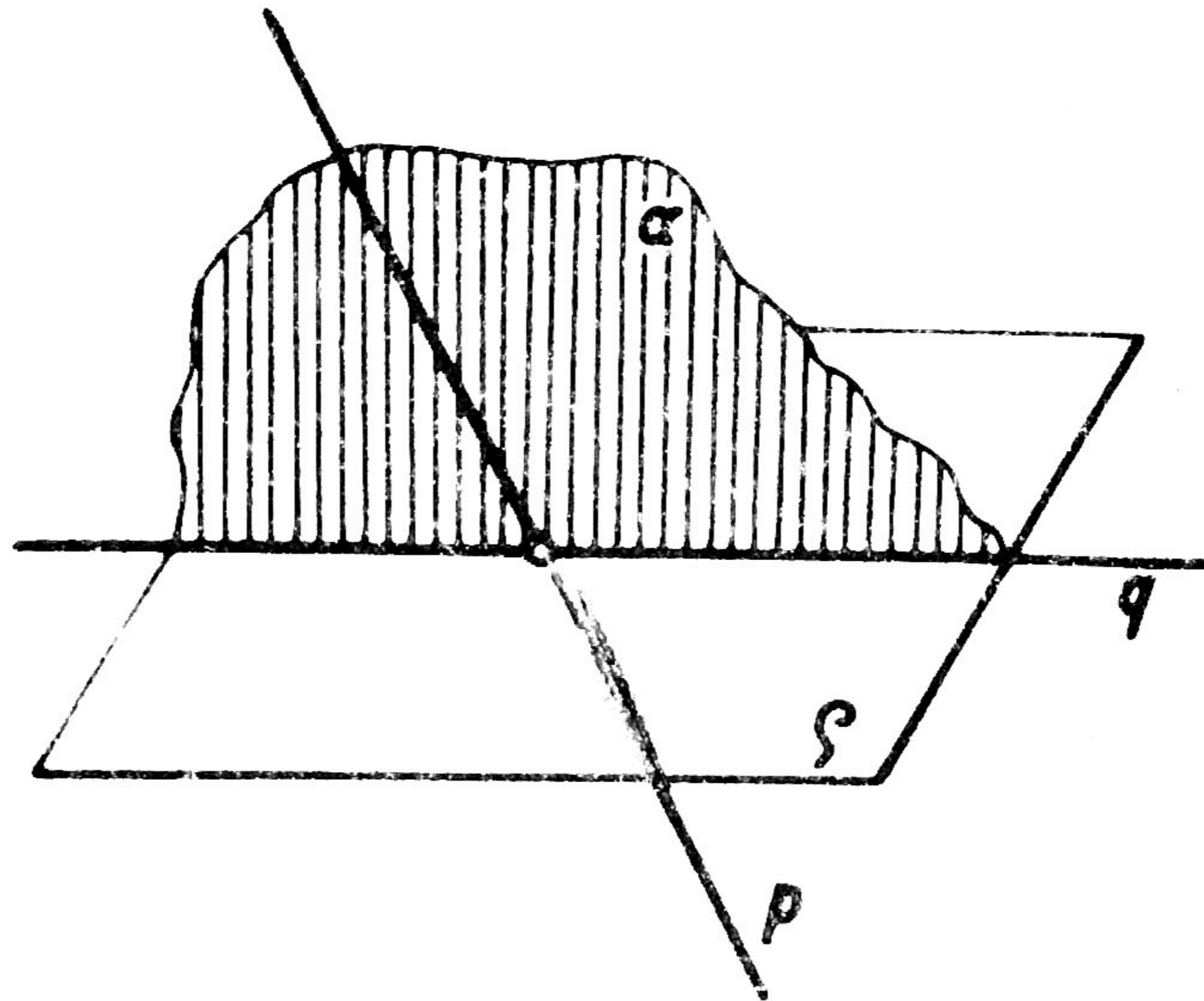
Zostrojte priesečnice rovín KLM a PQR:



Priesečník priamky s rovinou

Priesečníkom je jeden bod.

Priemik priamky s rovinou získame preložením inej roviny cez danú priamku (rovina je rôznobežná s danou prvou rovinou). Zostrojíme priesečnice rovín. V prieniku priesečnice rovín a danej priamky sa nachádza hľadaný bod - priesečník priamky s rovinou.



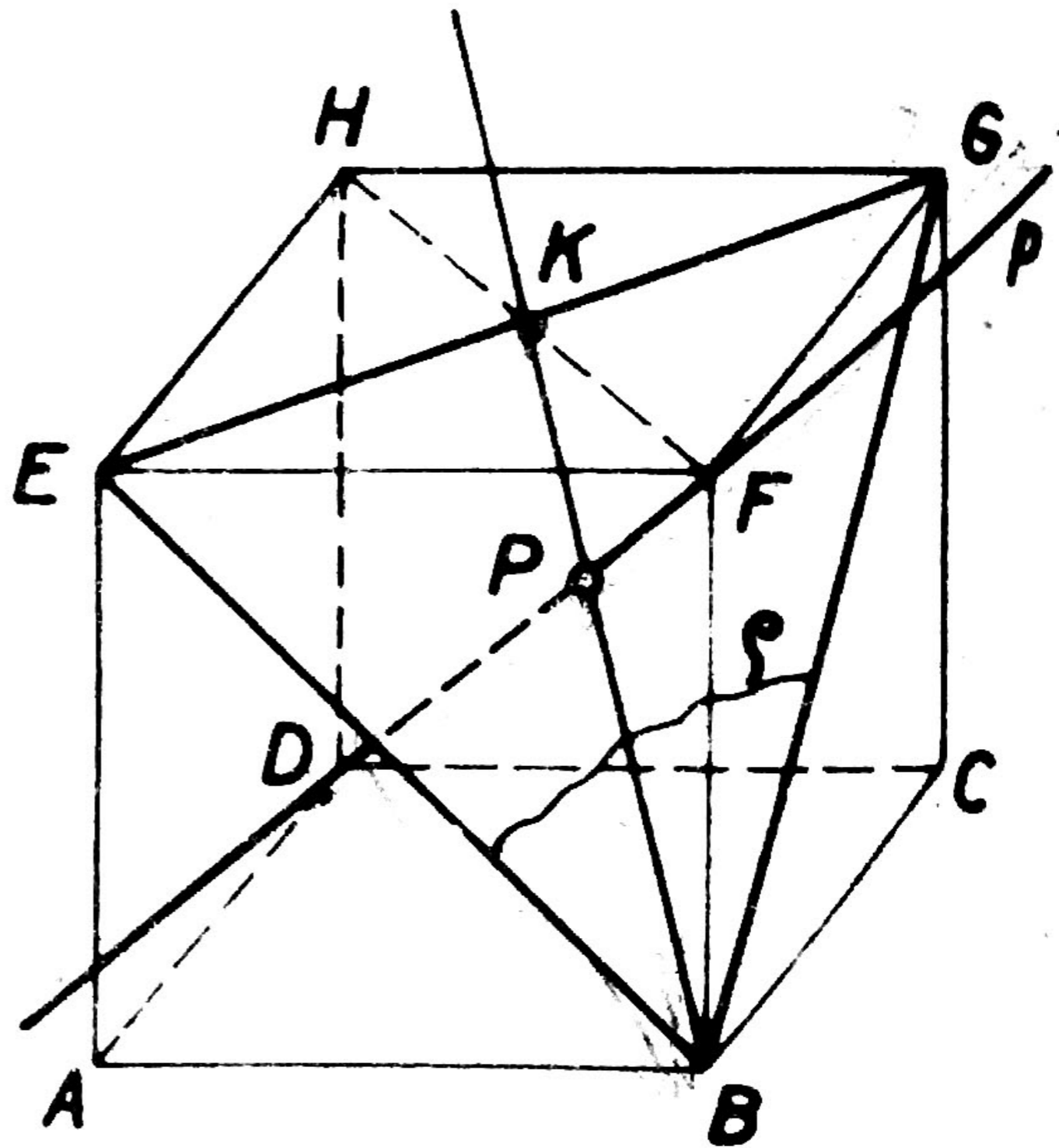
Úloha:

V kocke $ABCDEFGH$ zostrojte priesečník priamky DF s rovinou BEG .

Úloha*

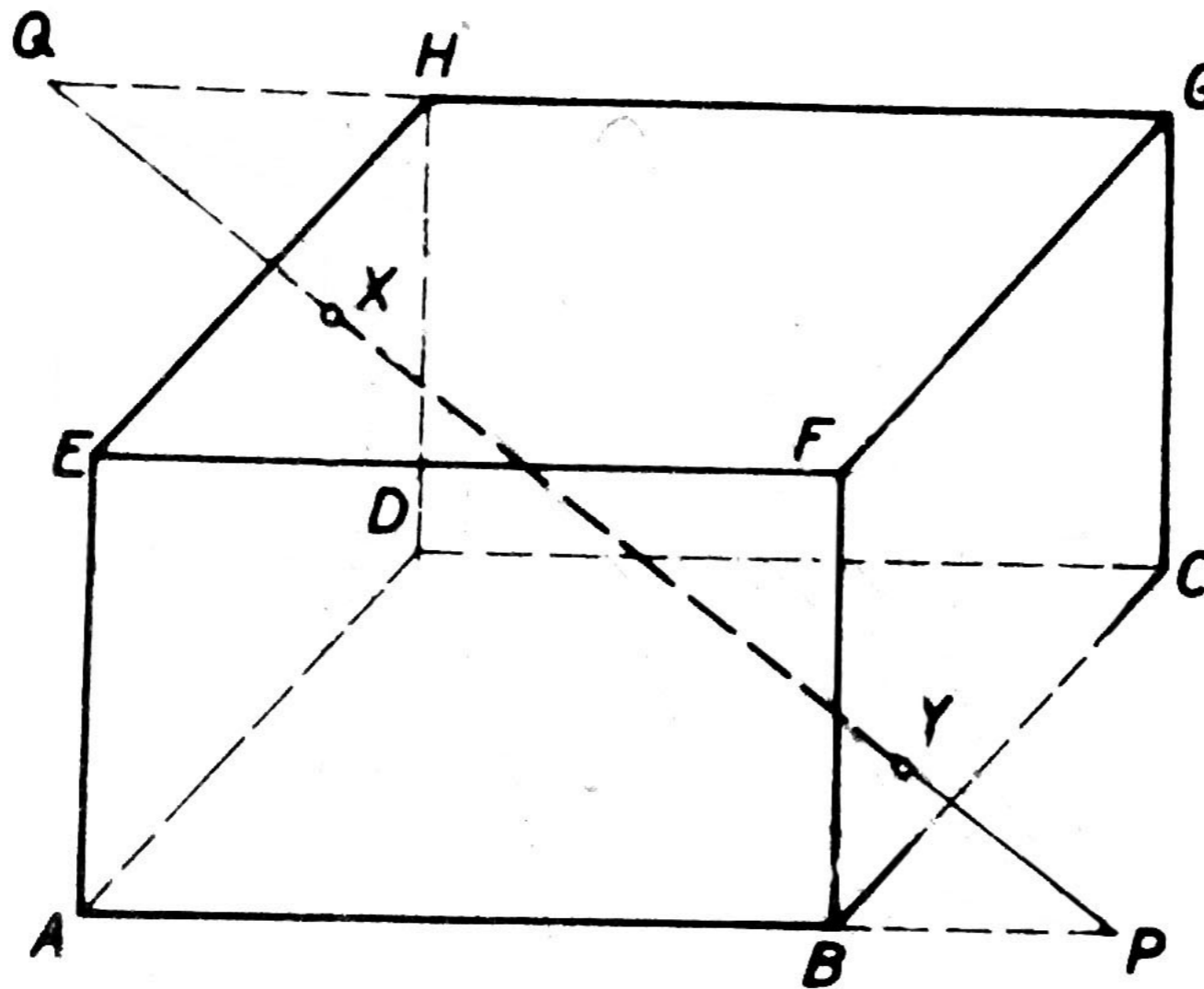
Pomocná rovina DFH,
priesečnica rovín,
priesečník priesečnice a
priamky.

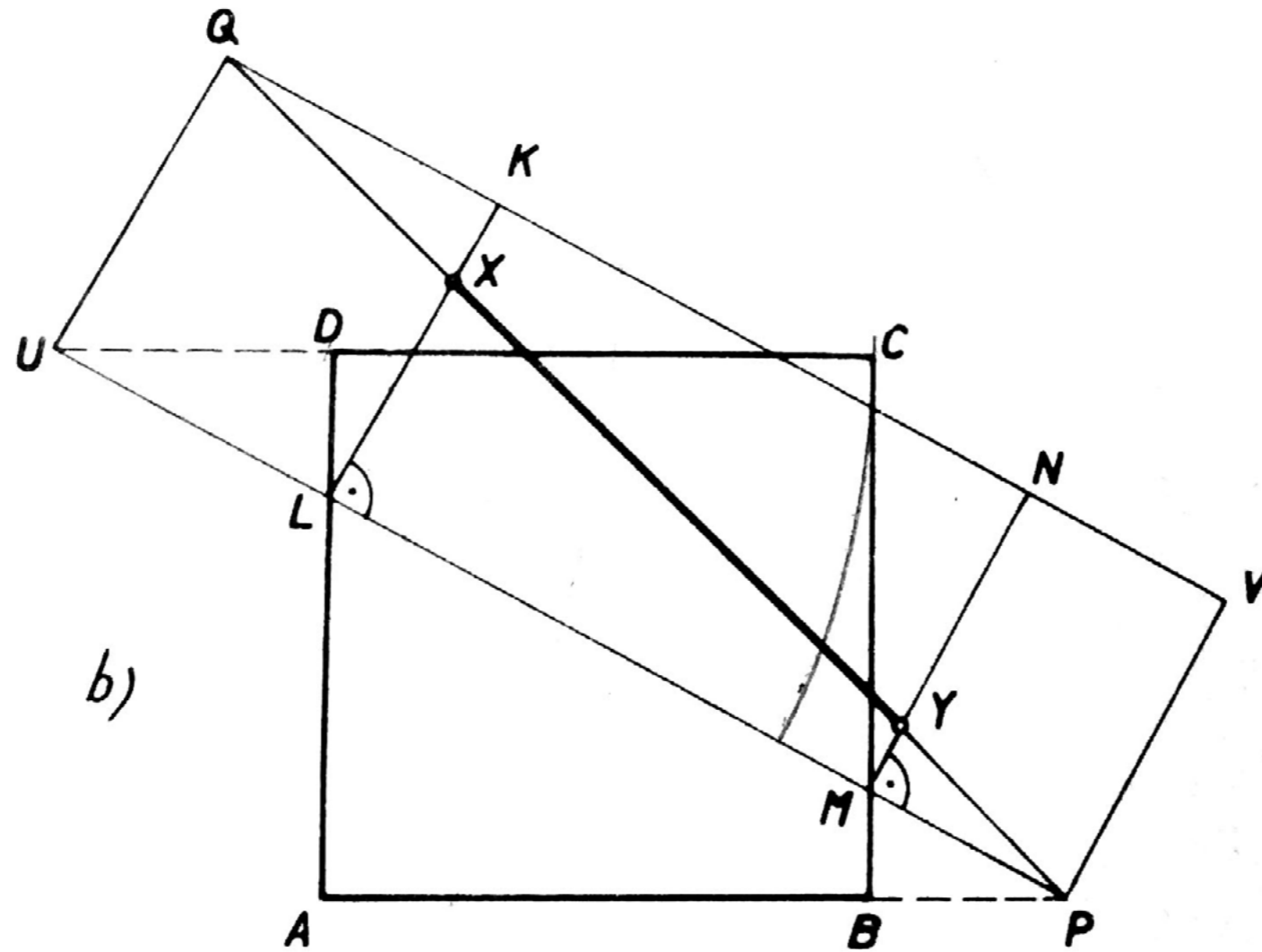
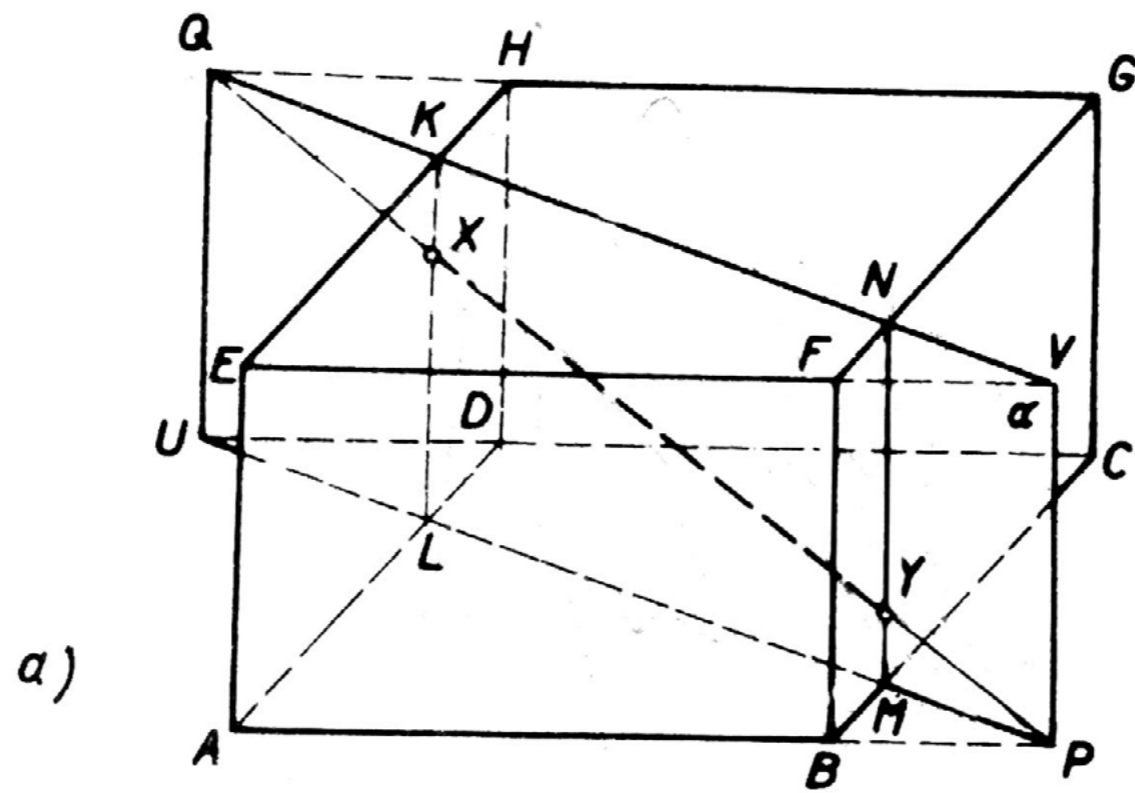
Iná pomocná rovina
napr DFE?



Úloha:

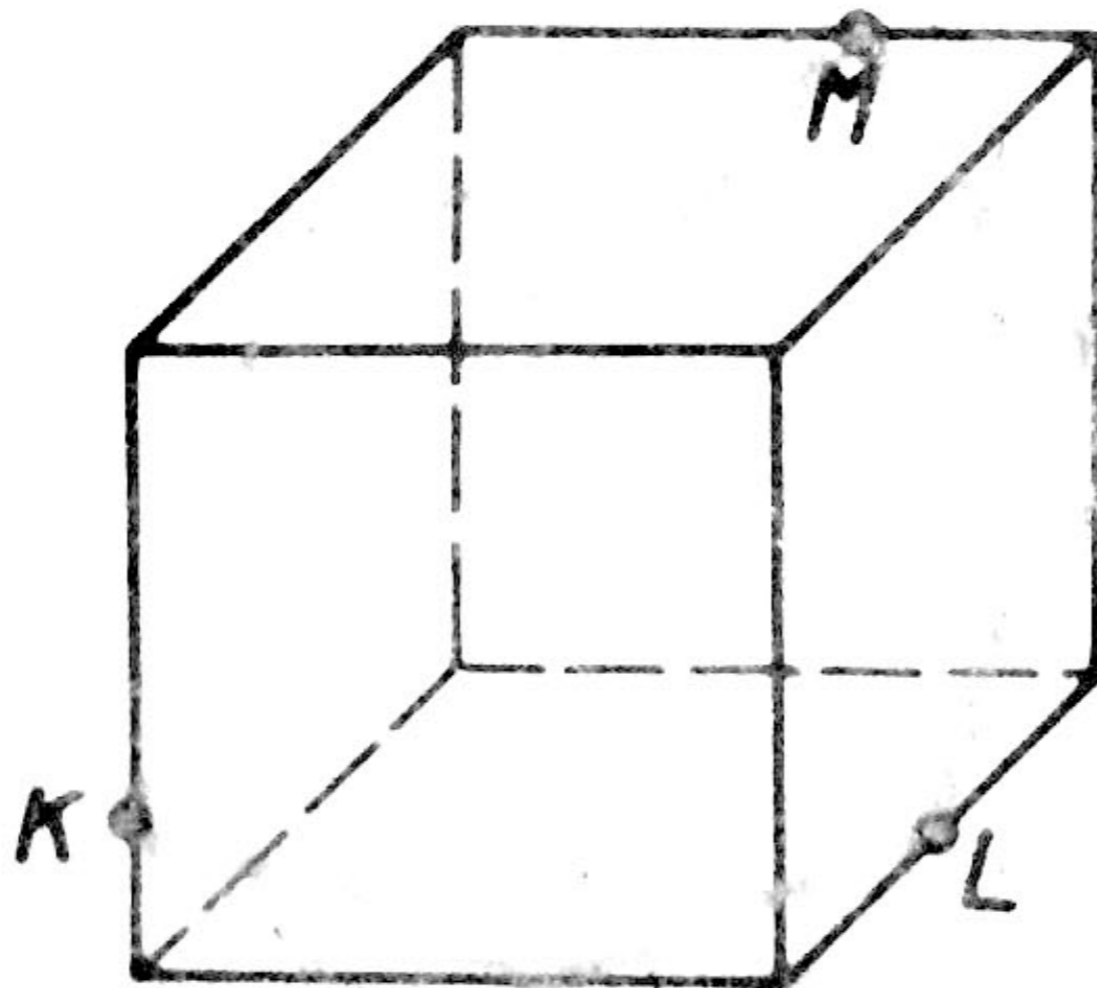
Daný je kváder ABCDEFGH. Rozmery AB a BC = 8cm, AE = 5cm. Body PQ ležia na polpriamkach AB a GH, vzdialenosť AP = 11cm a QG = 12cm Zostrojte prienik priamky PQ s kvádrom a graficky určte jeho dĺžku.



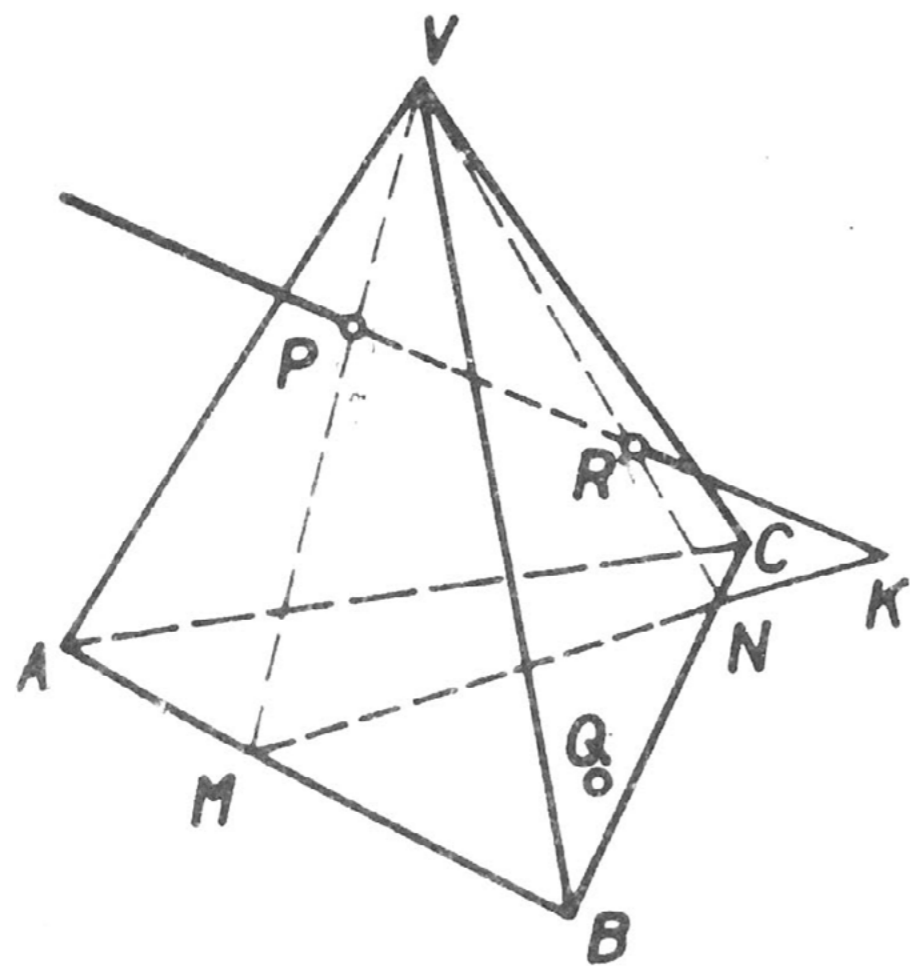


Úloha BONUS:

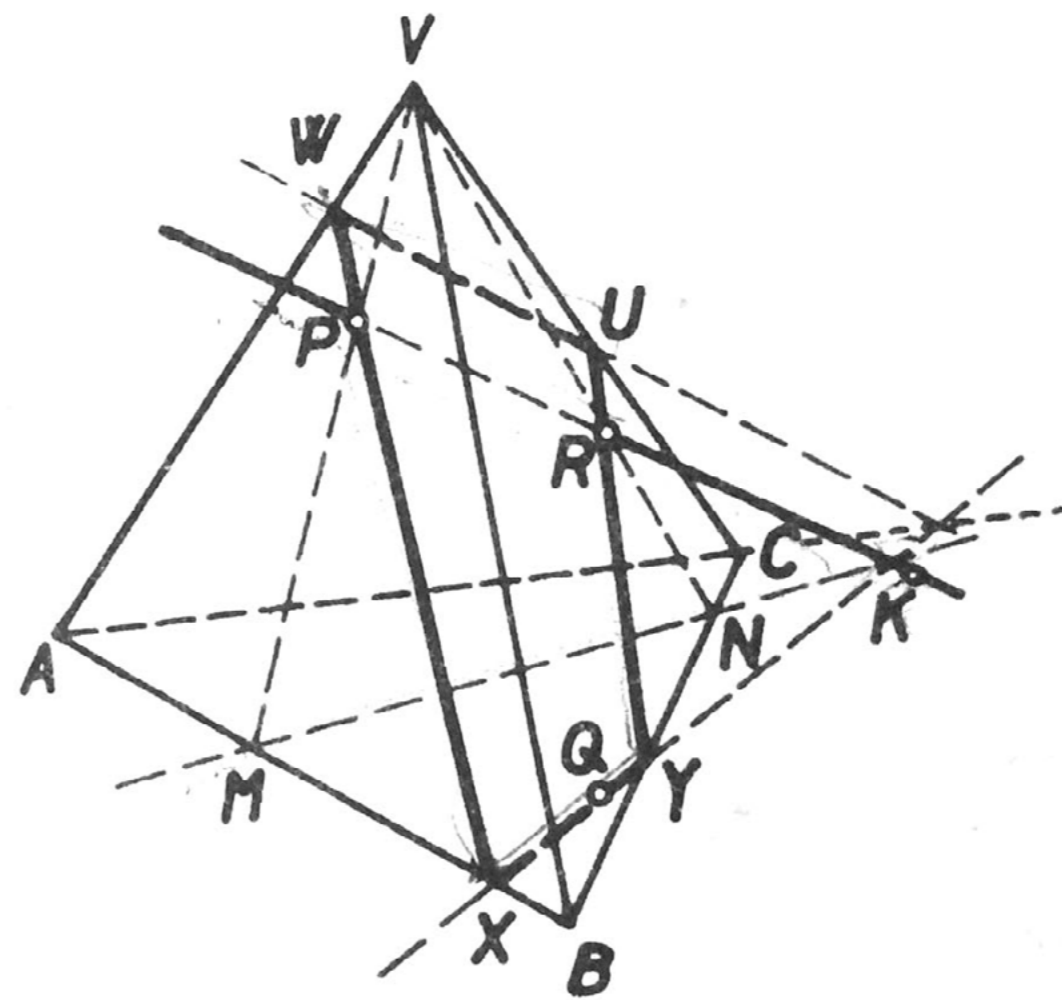
Zostrojte rez kockou rovinou KLM.



Úloha BONUS*



a)

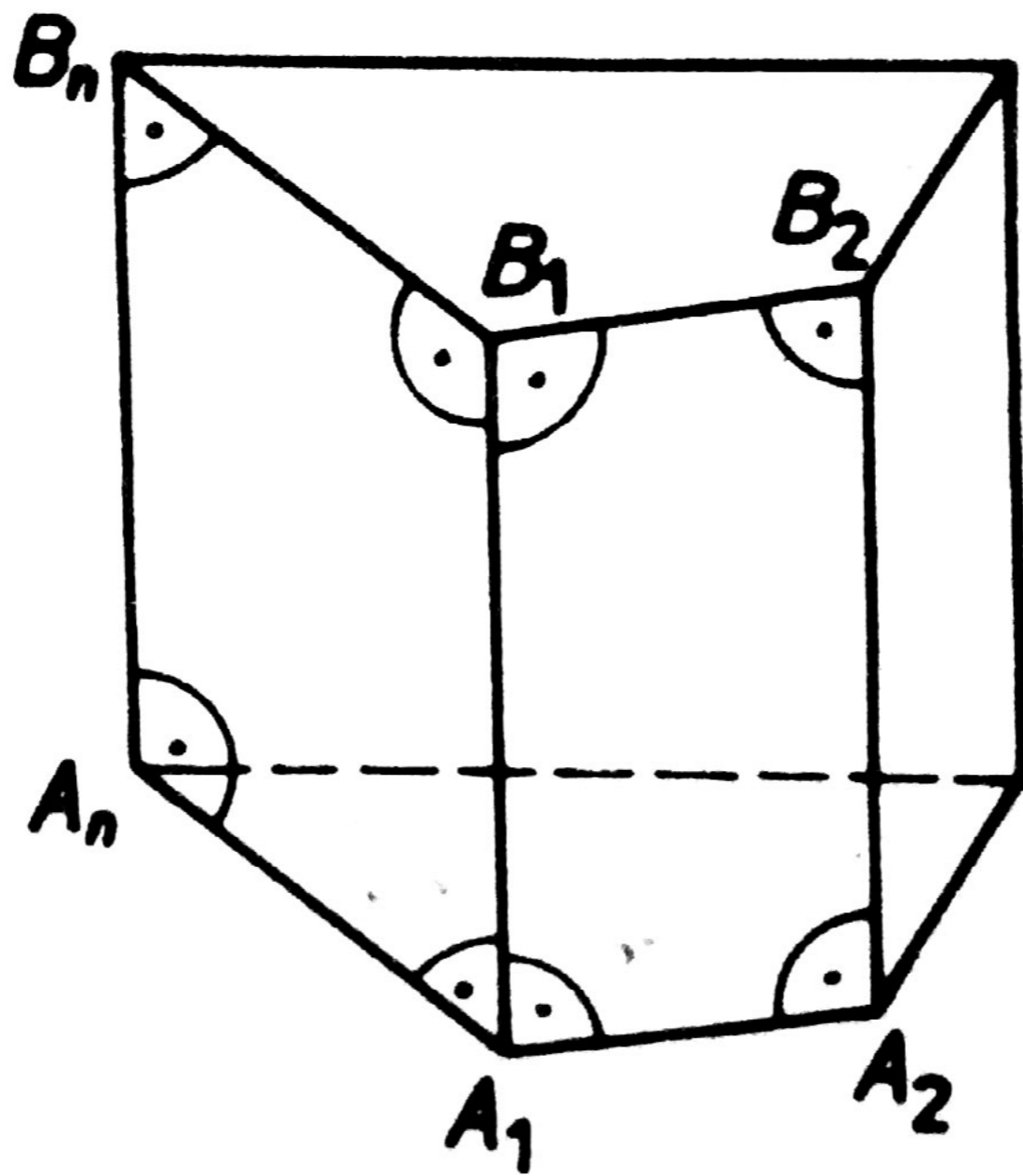


b)

Priamka kolmá na rovinu

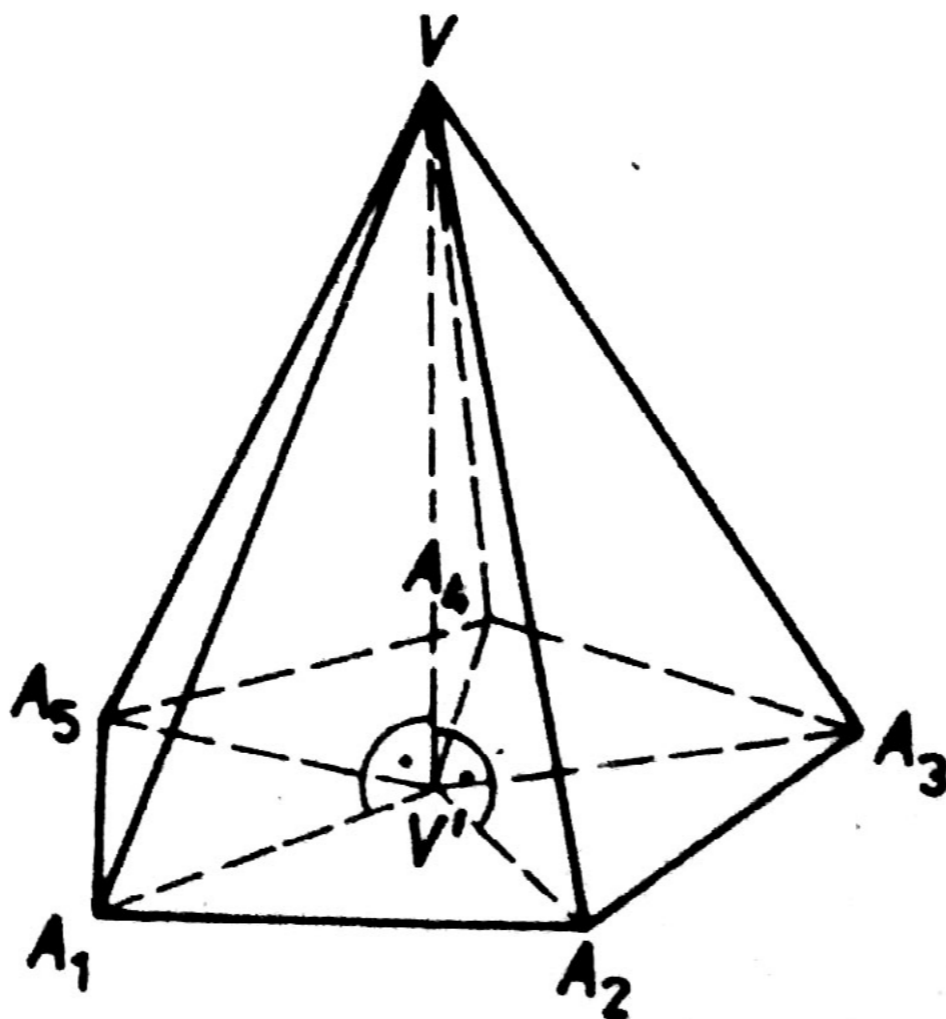
Priamka je kolmá na rovinu vtedy keď je kolmá na všetky priamky tejto roviny.

Ak je priamka kolmá na dve rôznobežné priamky roviny, tak je na túto rovinu kolmá.



Pozn. - kolmé primietanie

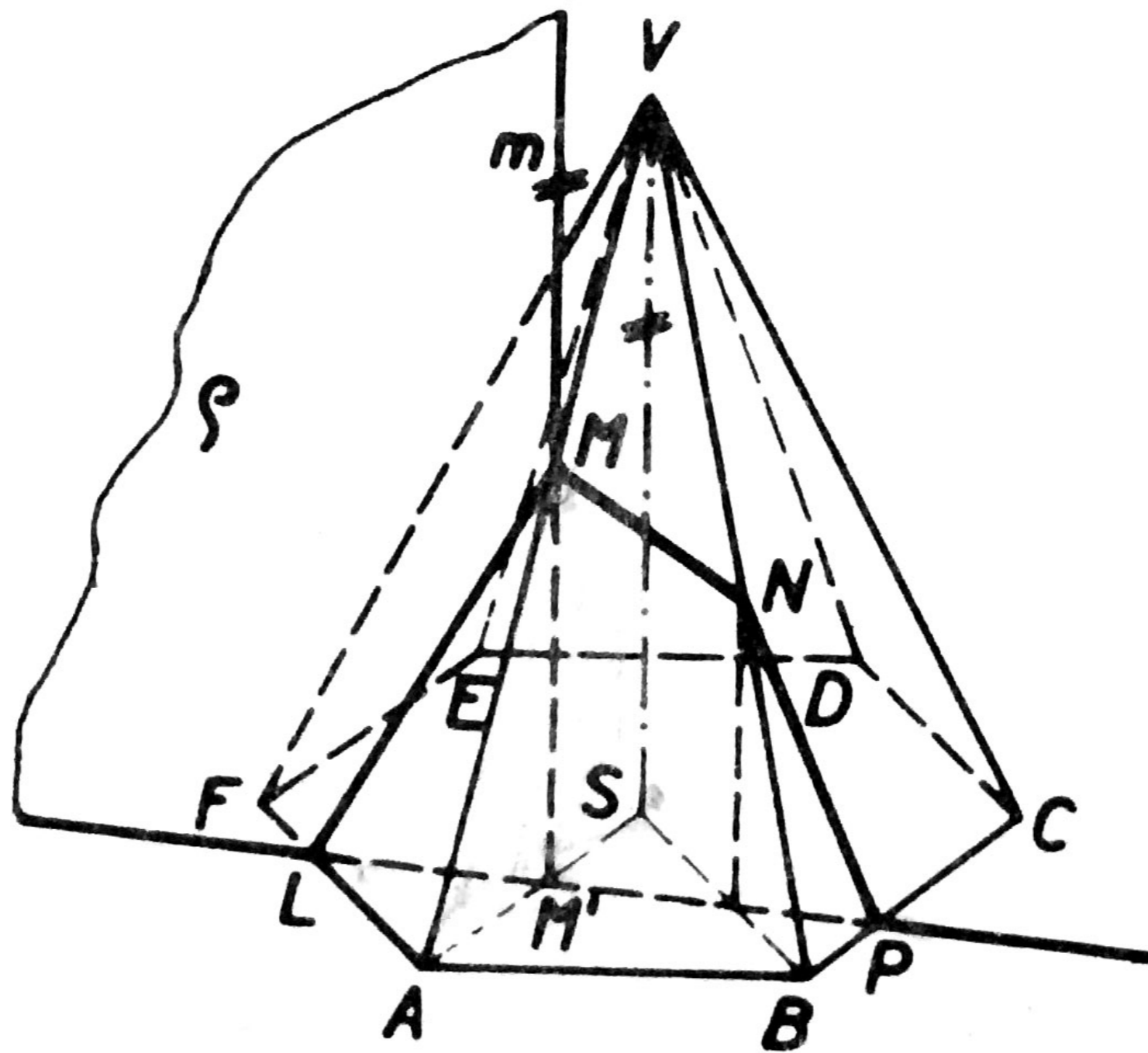
Kolmým priemetom bodu do roviny je päta kolmice vedenej daným bodom na danú rovinu.



Úloha:

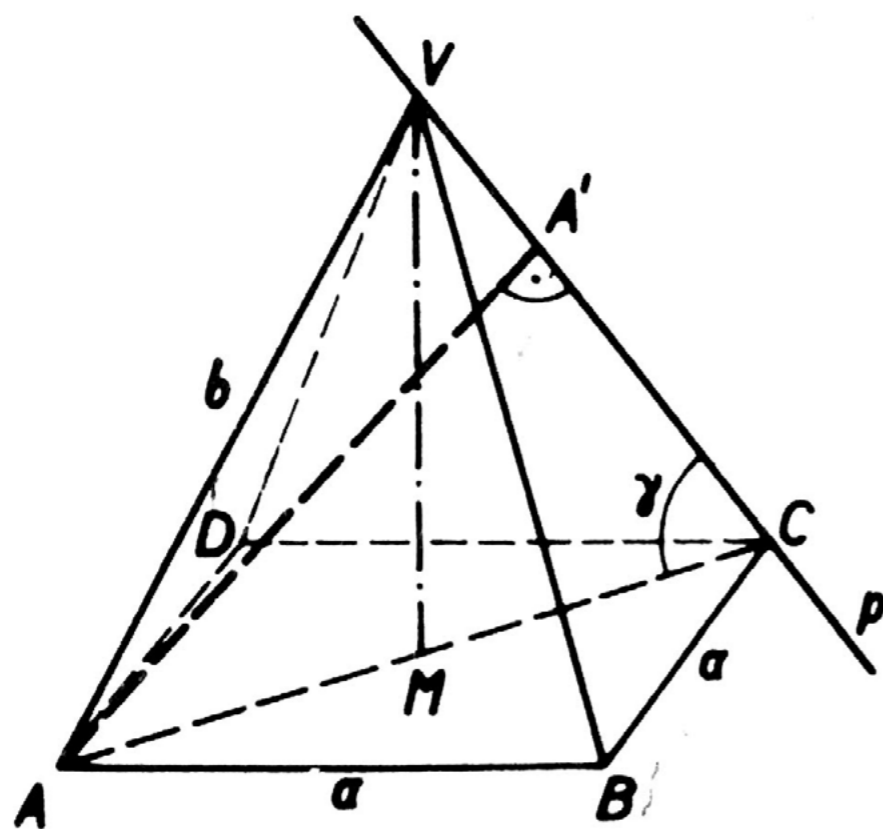
Zostrojte prienik polroviny pravidelným šestibokým ihlanom ABCDEFV. Polrovina je kolmá na podstavu a prechádza bodmi L, P hrán AF, BC.

Úloha*

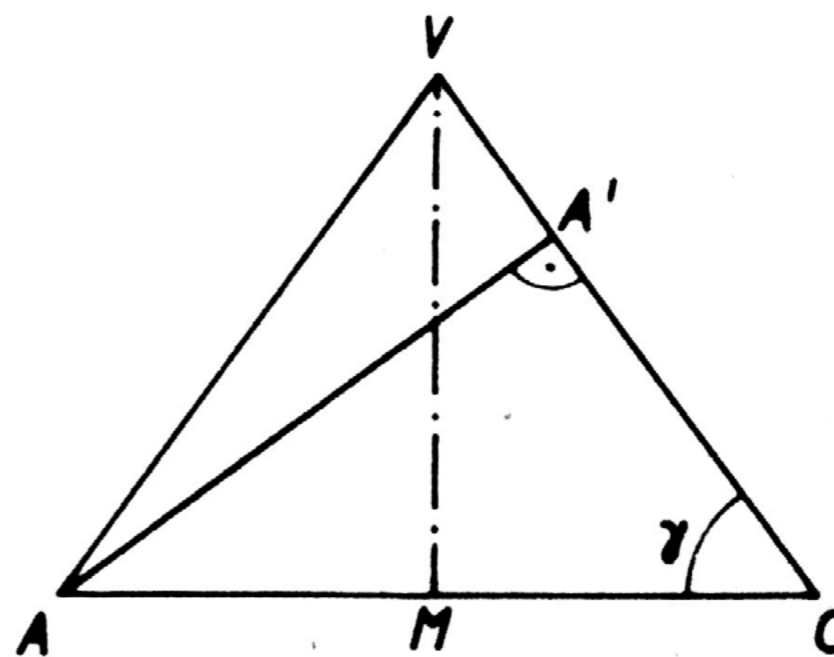


Vzdialenosť bodu od roviny

Vzdialenosť bodu od roviny, resp. priamky je vzdialenosť daného bodu od jeho kolmého priemetu do tejto roviny, resp. priamky.



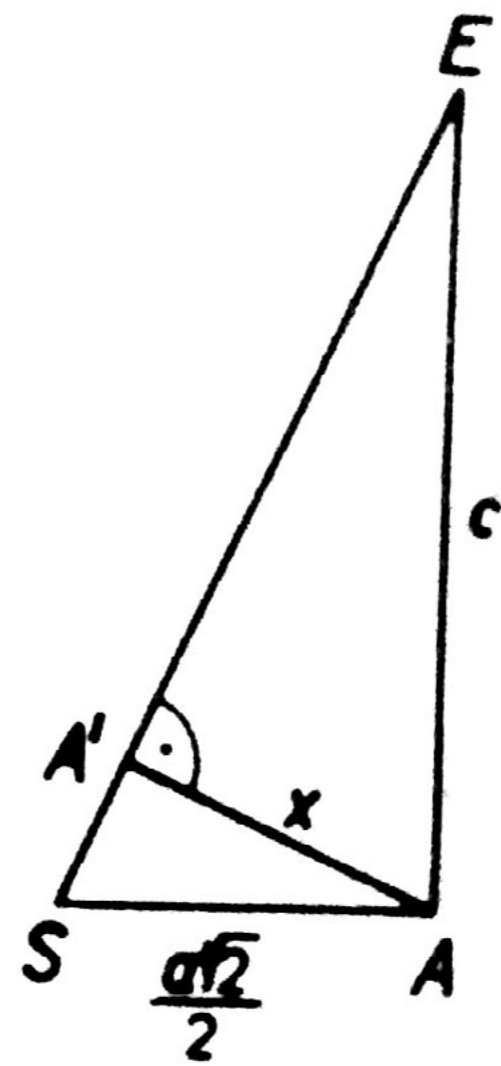
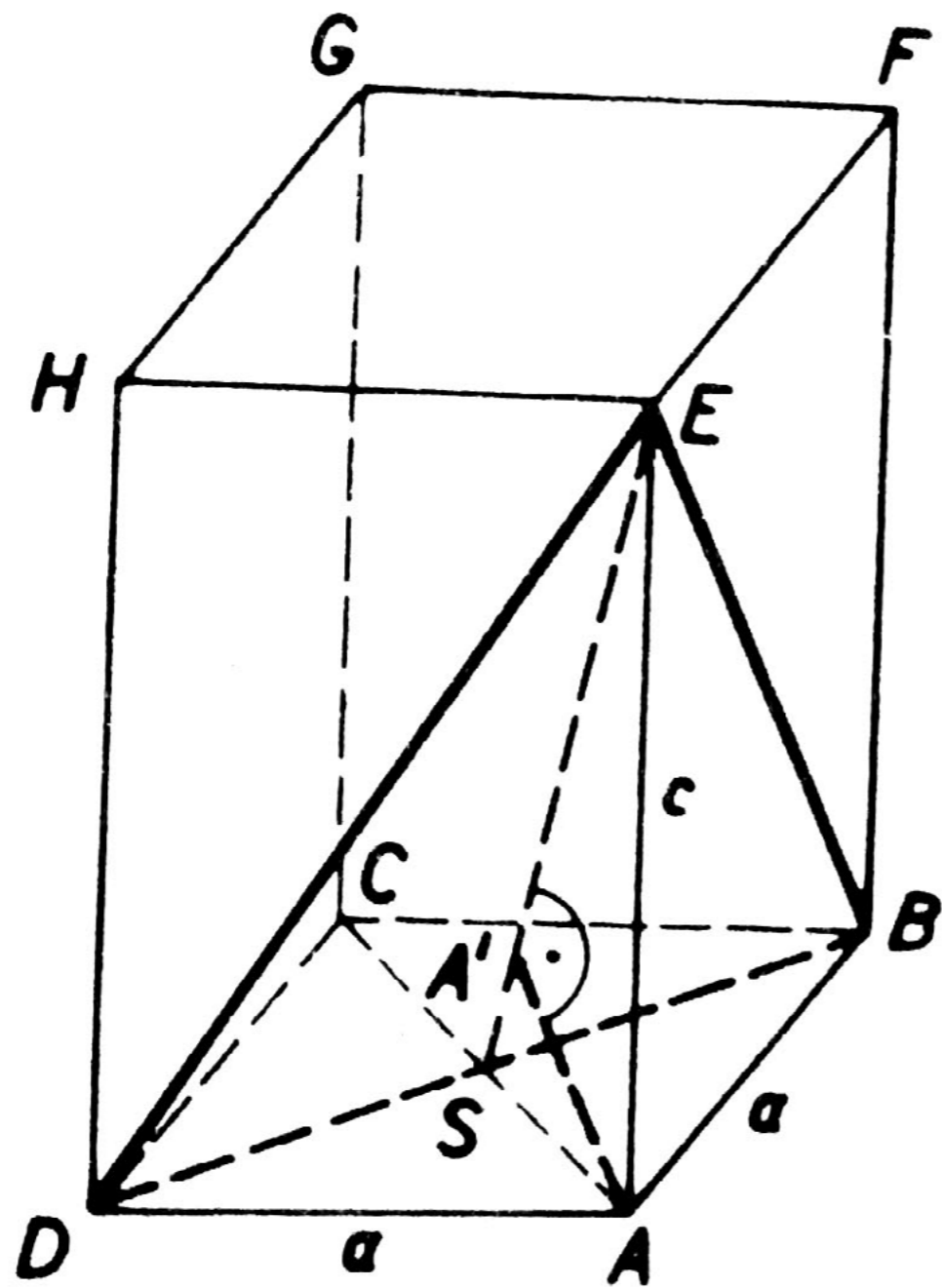
a)



b)

Úloha:

Hranol ABCDEFGH, podstava je štvorec o rozmere 4cm, výška hranola je 6cm. Určte (stačí graficky) vzdialenosť bodu A od roviny BDE.



Úloha:

Určte vzdialenosť rovín ACH a BGE v kocke $ABCDEFGH$.

