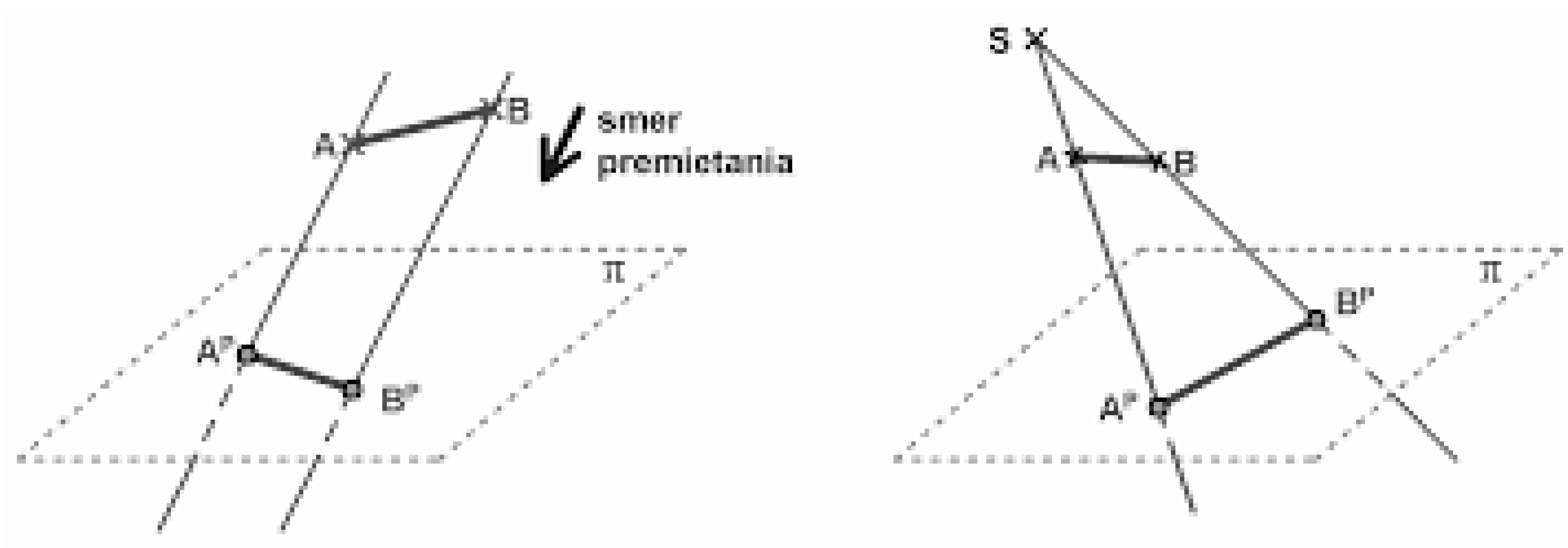
# DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA

Deskriptívna geometria je odvetvie matematiky zaoberajúce sa zobrazovaním **trojrozmerného priestoru** do **roviny**. Poskytuje metódy, ktoré umožňujú dosiahnuť jednoznačnosť týchto zobrazení. Základnou metódou je **premietanie**.

# Premietanie

Základné typy:
- rovnobežné premietanie (špeciálnym typom je kolmé premietanie)
- stredové premietanie

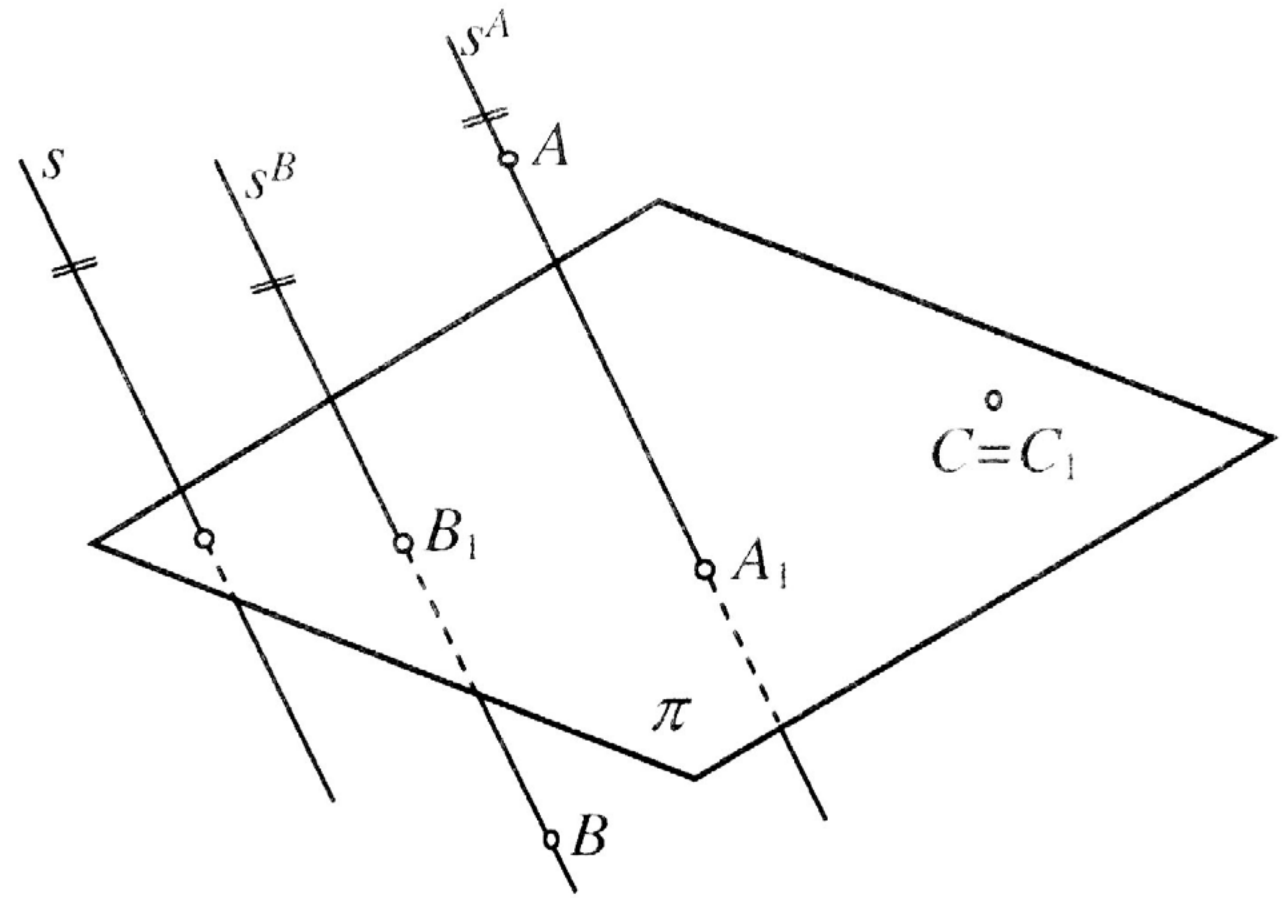



a) b)

# Rovnobežné premietanie

## Rovnobežný priemet bodu

Rovnobežný priemet bodu je vždy bod, ktorý je priesečník premietacej priamky bodu a priemetne. Priemet bodu, ktorý leží v priemetni, je ten istý bod. Na obrázku 3.1.1 je zobrazený rovnobežný priemet bodov $A$ a $B$, ktoré ležia v opačných polpriestoroch vzhľadom na priemetňu $\pi$ a bodu $C$, ktorý leží v priemetni. $s^A$ je premietacia priamka bodu $A$ a $s^B$ je premietacia priamka bodu $B$.



Obr. 3.1.1

Priemet útvaru $\mathbb{U}$ je útvar $\mathbb{U}_1$, ktorý je množinou priemetov všetkých bodov útvaru $\mathbb{U}$. Premietacie priamky všetkých bodov útvaru $\mathbb{U}$ vytvárajú premietací útvar, $\mathbb{U}_1$ je prienikom premietacieho útvaru a priemetne. Ak útvar $\mathbb{U}$ leží v priemetni, tak jeho priemet je zhodný s pôvodným útvarom, t. j. $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}$. Najjednoduchšie geometrické útvary sú bod, priamka a rovina.

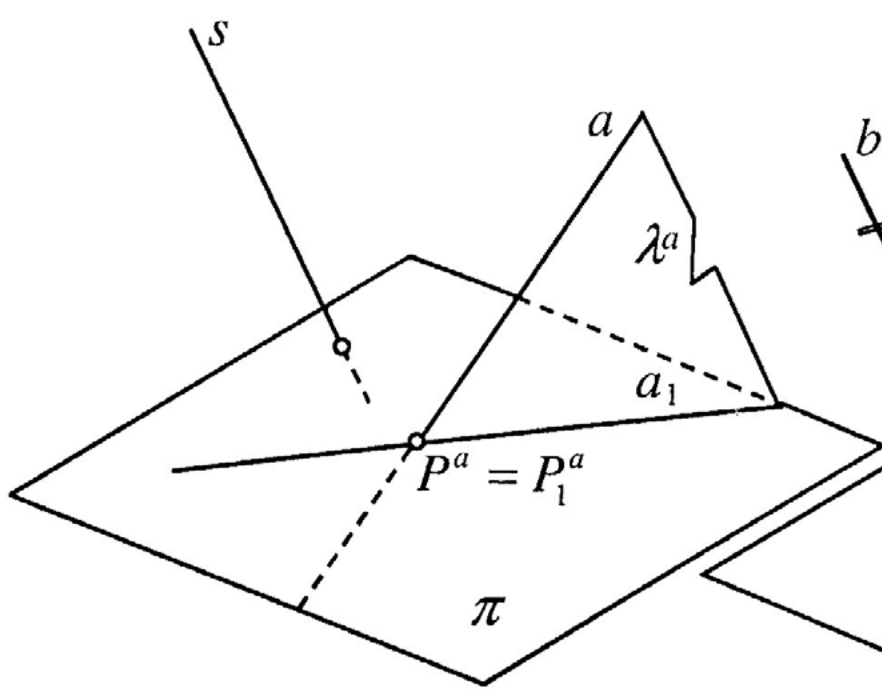
## Rovnobežný priemet priamky

Ak priamka $a$ nie je rovnobežná so smerom premietania, tak premietací útvar priamky je rovina, označíme ju $\lambda^a$ $(a \subset \lambda^a \wedge \lambda^a \parallel s)$. Priemet priamky $a$ je priamka $a_1 = \lambda^a \cap \pi$ (Obr. 3.1.2a). Premietací útvar priamky $b$, ktorá je rovnobežná so smerom premietania, je priamka $b$, preto jej priemetom je jediný bod $b_1 = b \cap \pi$ (Obr. 3.1.2b).

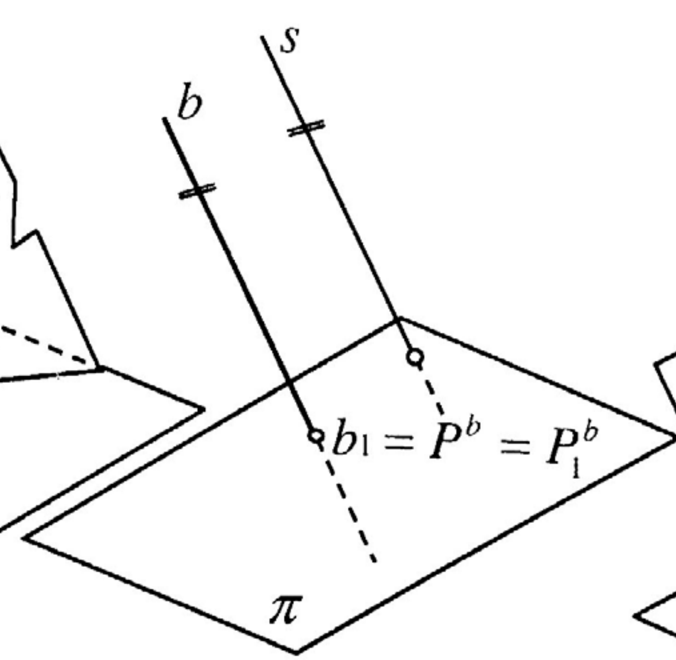
**Veta 3.1.1:** Rovnobežný priemet priamky je bod, ak je priamka rovnobežná so smerom premietania, inak je rovnobežný priemet priamky priamka.

**Definícia 3.1.2:** Stopník priamky je priesečník priamky s priemetňou.

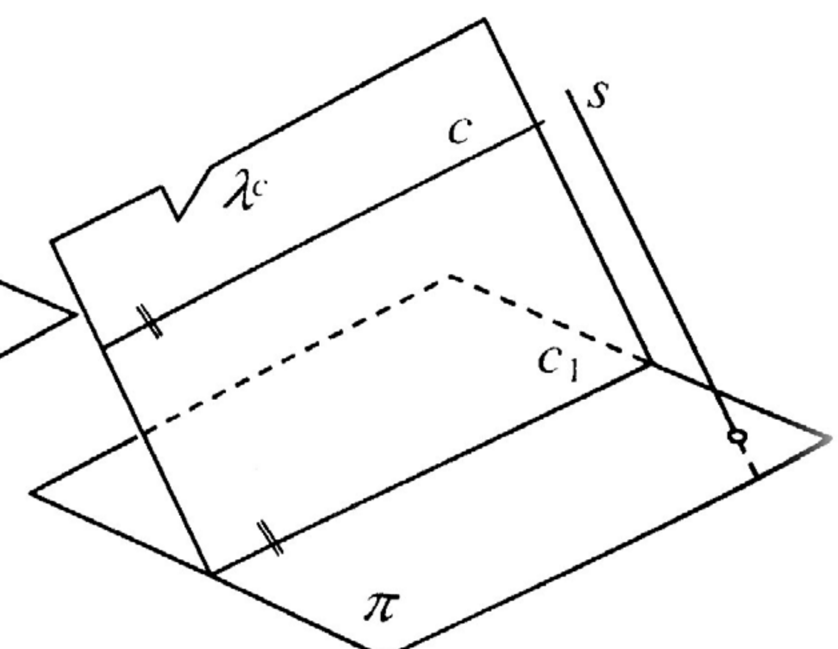
Stopník priamky $a$ v priemetni $\pi$ označujeme $P^a$. Na Obr. 3.1.2a, b sú zobrazené stopníky $P^a$ a $P^b$ priamok $a$ a $b$. Priamka $c$ rovnobežná s priemetňou stopník nemá, jej rovnobežný priemet je priamka $c_1 \parallel c$ (Obr. 3.1.2c).




Obr. 3.1.2a



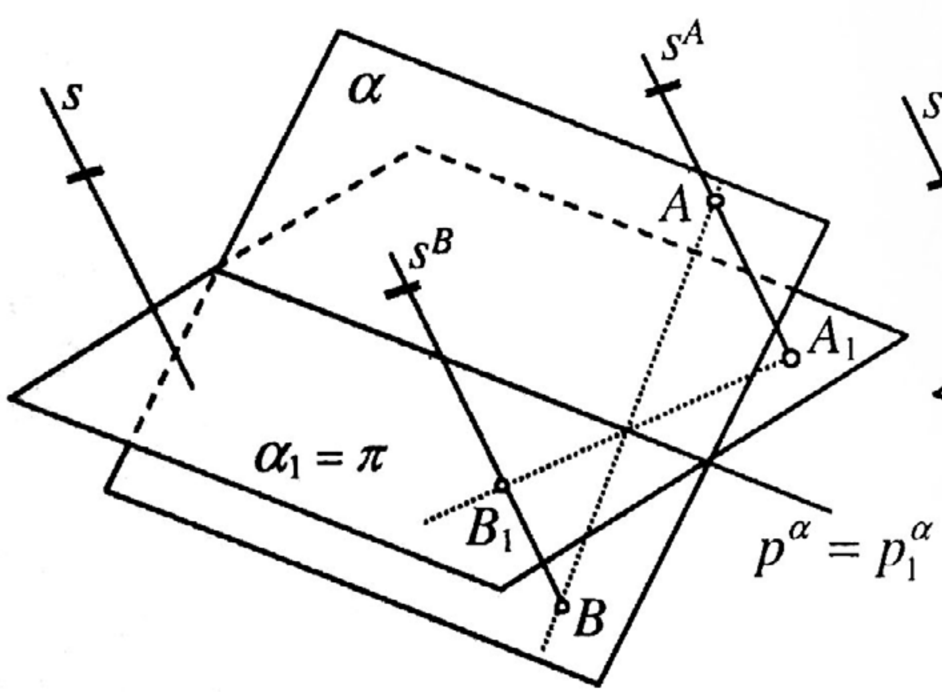

Obr. 3.1.2b



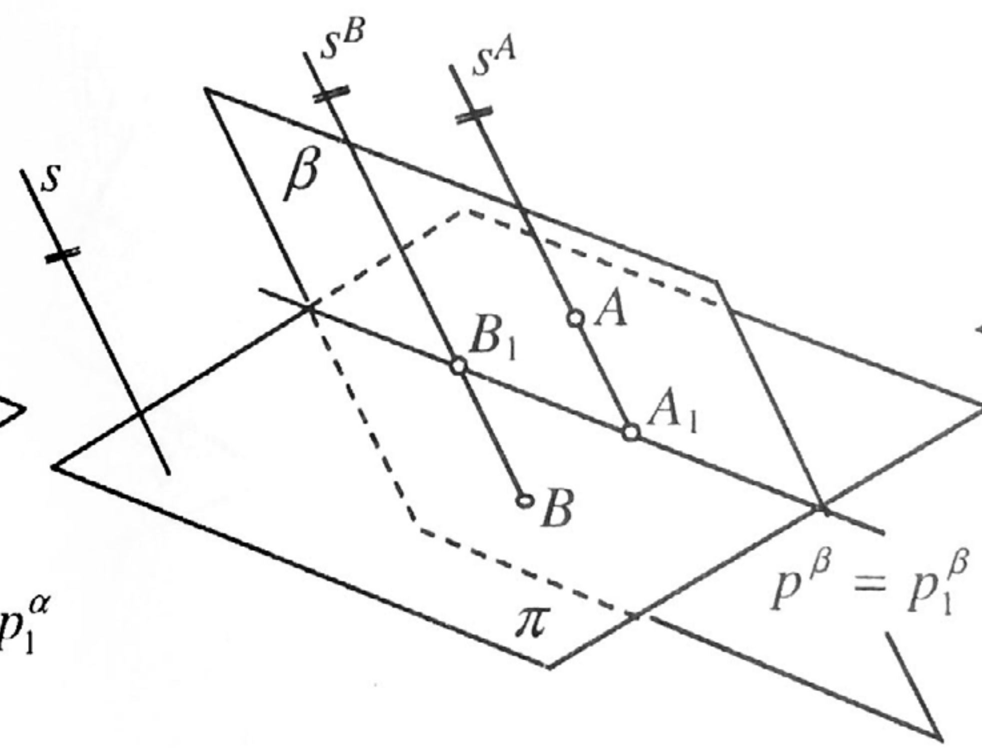

Obr. 3.1.2c

## Rovnobežný priemet roviny

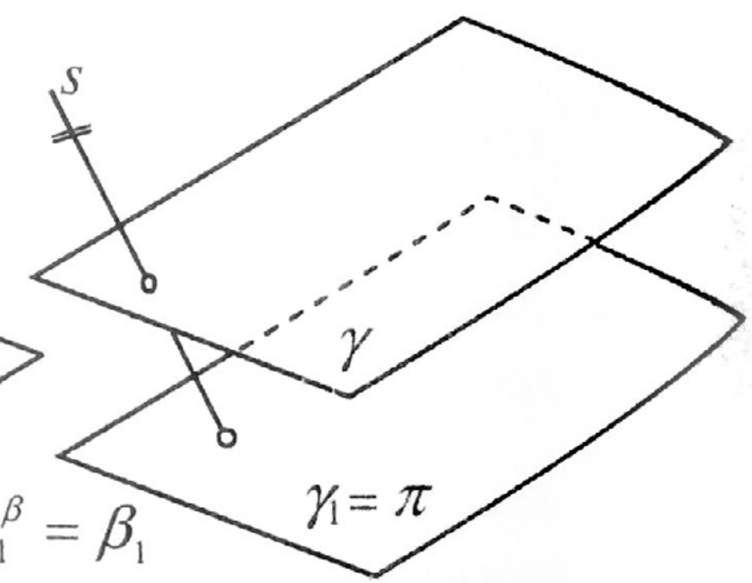
Ak rovina $\alpha$ nie je rovnobežná so smerom premietania, tak premietacie priamky všetkých jej bodov vyplnia celý priestor, preto priemetom takejto roviny je celá priemetňa, t. j. $\alpha_1 = \pi$ (Obr. 3.1.3a). Ak rovina $\beta$ je rovnobežná so smerom premietania, tak premietací útvar roviny $\beta$ je samotná rovina $\beta$ a jej rovnobežný priemet je jediná priamka $\beta_1 = \beta \cap \pi$ (Obr. 3.1.3b).




Obr. 3.1.3a




Obr. 3.1.3b




Obr. 3.1.3c

**Veta 3.1.2:** Rovnobežný priemet roviny je priamka, ak je rovina rovnobežná so smerom premietania, inak je rovnobežný priemet roviny celá priemetňa.

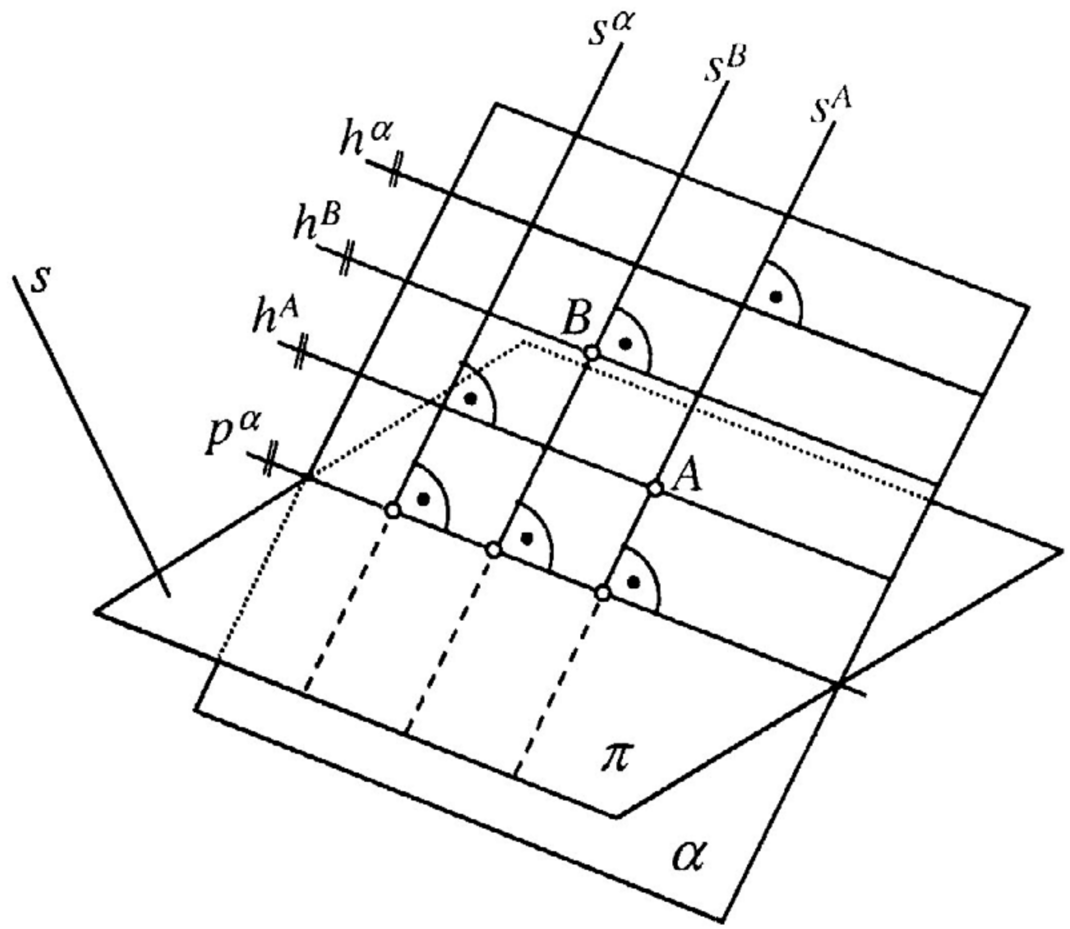
**Definícia 3.1.3:** Stopa roviny je priesečnica roviny s priemetňou.

Stopu roviny $\alpha$ v priemetni $\pi$ označujeme $p^{\alpha}$. Na Obr. 3.1.3a,b sú zobrazené stopy $p^{\alpha}$ a $p^{\beta}$ rovín $\alpha$ a $\beta$. Rovina $\gamma$ rovnobežná s priemetňou stopu nemá, jej rovnobežný priemet je celá priemetňa $\gamma_1 = \pi$ (Obr. 3.1.3c).

Pre mnohé konštrukcie v deskriptívnej geometrii sú dôležité dve sústavy priamok v rovine: hlavné a spádové priamky.

**Definícia 3.1.4:** Hlavná priamka roviny je priamka roviny rovnobežná s priemetňou. Spádová priamka roviny je priamka roviny kolmá na stopu tejto roviny.

**Poznámka:** Hlavné priamky roviny $\alpha$ označujeme $h^{\alpha}$ a spádové priamky $s^{\alpha}$. Ak pracujeme s viacerými hlavnými, resp. spádovými priamkami jednej roviny používame ako index bod, ktorým tieto priamky prechádzajú, t. j. použijeme označenie $h^{A}$ a $s^{A}$ v prípade, keď priamky prechádzajú bodom $A \in \alpha$ a v úlohe vystupuje len jedna rovina (Obr. 3.1.4).



Obr. 3.1.4

Pripomeňme si tri fakty, ktoré vyplývajú priamo zo základných viet zo stereometrie:

- Každá hlavná priamka roviny je rovnobežná so stopou roviny.
- Priamka roviny rôzna od hlavnej priamky má svoj stopník na stope tejto roviny.
- Každá spádová priamka je kolmá na každú hlavnú priamku danej roviny, t. j. hlavné a spádové priamky tvoria pravouhlú sieť priamok v rovine (Obr. 3.1.4).

**Pojmy:**

Stopník priamky - bod, priesečnica priamky s priemetňou

Stopa roviny - priamka, priesečnica roviny s priemetňou

Hlavná priamka roviny - prianka roviny rovnobežná s primetňou

Spádová priamka - priamka roviny kolmá na stopu tejto roviny

## 3.2 Základné vlastnosti rovnobežného premietania

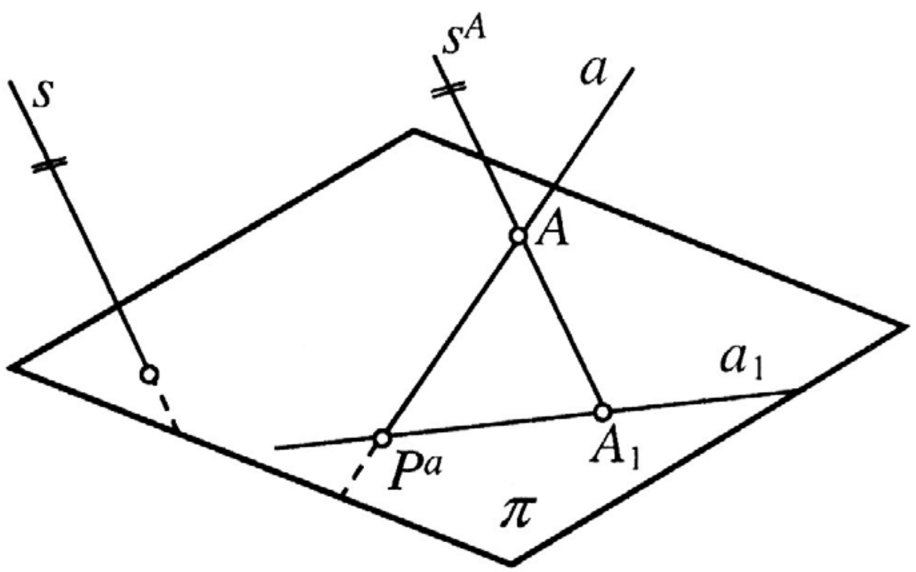
V tejto časti uvedieme vlastnosti rovnobežného premietania, ktoré vyplývajú zo základných poznatkov planimetrie, stereometrie a z definície rovnobežného premietania. V ďalších častiach sa budeme na tieto vlastnosti odvolávať.

V1. Rovnobežné premietanie zachováva incidenciu útvarov. Útvar $\mathbb{U}$ inciduje s útvarom $\mathbb{V}$, ak $\mathbb{U}$ je prvok alebo podmnožina $\mathbb{V}$ alebo $\mathbb{V}$ je prvok alebo podmnožina $\mathbb{U}$. Napríklad:

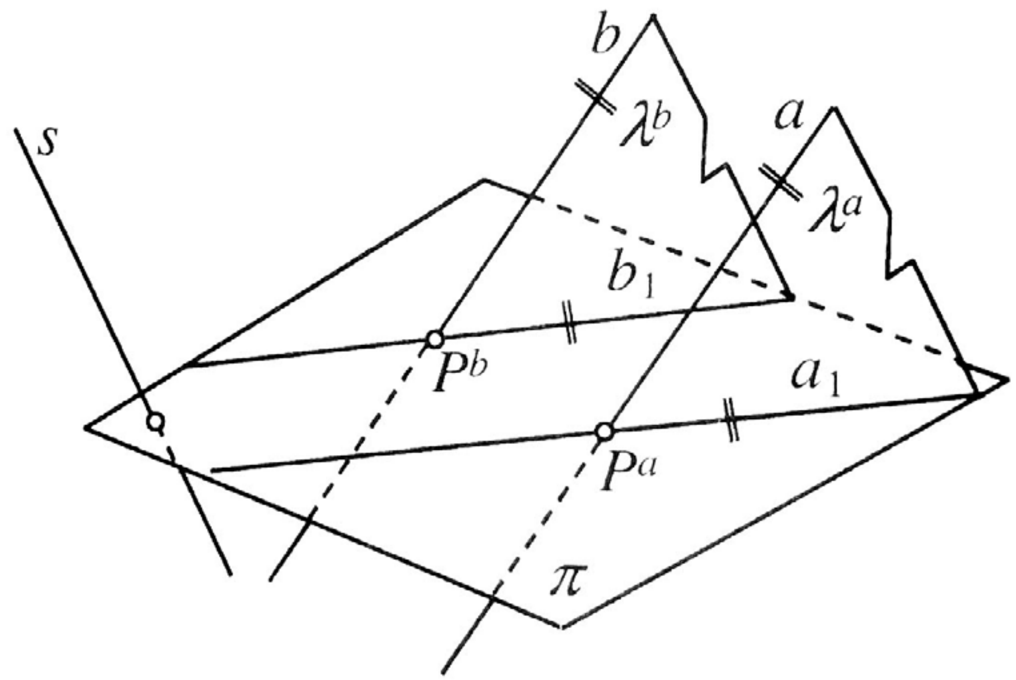
- bod $A$ inciduje s priamkou $a$ znamená, že $A \in a$,
- bod $A$ inciduje s rovinou $\alpha$ znamená, že $A \in \alpha$,
- priamka $a$ inciduje s rovinou $\alpha$ znamená, že $a \subset \alpha$.

Zachovanie incidencie bodov a priamok znamená: ak $A \in a$, tak $A_1 \in a_1$ (Obr. 3.2.1a).

V2. Rovnobežné premietanie zachováva rovnobežnosť priamok, t. j. ak $a$, $b$ sú dve navzájom rovnobežné priamky v priestore, ktoré nie sú rovnobežné so smerom premietania, tak ich rovnobežné priemety $a_1$, $b_1$ sú navzájom rovnobežné priamky v priemetni (Obr. 3.2.1b).




Obr. 3.2.1a




Obr. 3.2.1b

V3. Rovnobežné premietanie zachováva deliaci pomer bodov na priamke. Deliaci pomer je definovaný pre tri kolineárne body (t. j. body ležiace na jednej priamke) takto:

**Definícia 3.2.1:** Nech $A$, $B$, $C$ sú tri kolineárne body, $B \neq C$. Deliaci pomer bodov $A$, $B$, $C$ je číslo $(A, B; C)$ definované takto:

1. ak $C$ leží na úsečke $AB$, tak $(A,B;C) = -\dfrac{|AC|}{|BC|}$

2. ak $C$ neleží na úsečke $AB$, tak $(A,B;C) = \dfrac{|AC|}{|BC|}$

**Vlastnosti rovnobežného premietania**

priemetom bodu je bod
priemetom priamky je priamka alebo bod
priemetom roviny je celá priemetňa alebo priamka

zachováva incidenciu (náleženie), rovnobežnosť, kolinearitu (deliaci pomer bodov, t.z. napr. strd úsečky sa zobrází do stredu úsečky)

všeobecne* nezachováva dĺžky, veľkosti uhlov (ani kolmosť)

**Kolmé (pravouhlé) premietanie**

Špeciálny typ rovnobežného premietania
Smer premietania je kolmý na priemetňu

## 3.3 Kolmé (pravouhlé) premietanie

Teraz sa budeme zaoberať špeciálnym prípadom rovnobežného premietania, kolmým premietaním, ktoré je základný prostriedok Mongeovej projekcie.

**Definícia 3.3.1:** Kolmé premietanie je také rovnobežné premietanie, ktorého smer je kolmý na priemetňu.

Kolmé premietanie je jednoznačne určené priemetňou. Pre kolmý priemet bodov, priamok a rovín platia všetky vety z časti 3.1, rovnako aj vlastnosti V1 až V4 z časti 3.2.

Z viet 3.1.1 a 3.1.2 vyplýva:

- Kolmý priemet priamky je bod, ak je priamka kolmá na priemetňu, inak je kolmý priemet priamky priamka.
- Kolmý priemet roviny je priamka, ak je rovina kolmá na priemetňu, inak je kolmý priemet roviny celá priemetňa.

Kolmé premietanie má vlastnosti, ktoré neplatia pre šikmé premietanie:

V5. Pre dĺžku kolmého priemetu úsečky platí:

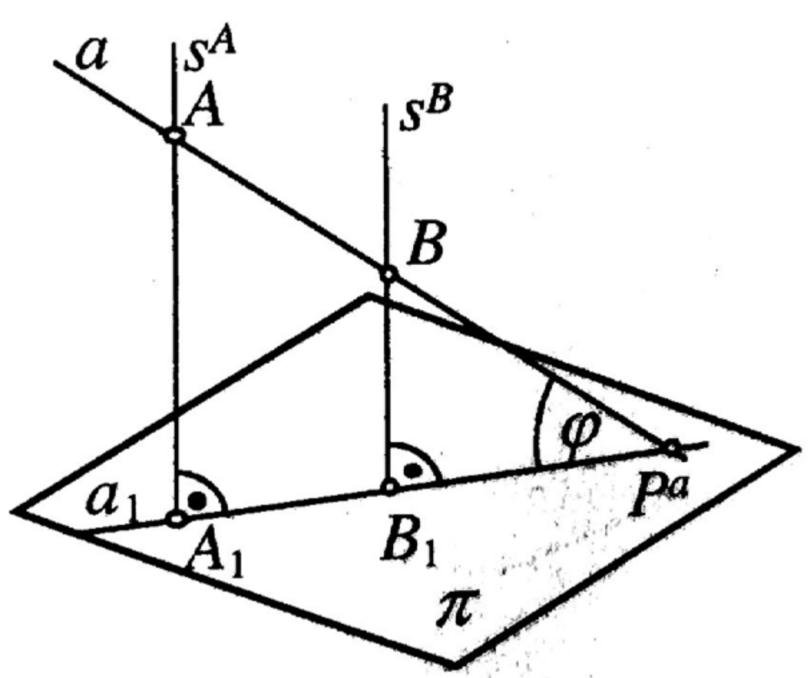
$$|A_1B_1| = |AB| \cdot \cos\varphi,$$

kde $A_1B_1$ je kolmý priemet úsečky $AB$ a $\varphi$ je uhol priamky $AB$ a priemetne $\pi$ (Obr. 3.3.1). Dĺžka priemetu úsečky je najväčšia, ak $AB \parallel \pi$, t. j. $\varphi = 0$, vtedy $\cos\varphi = 1$ a platí:

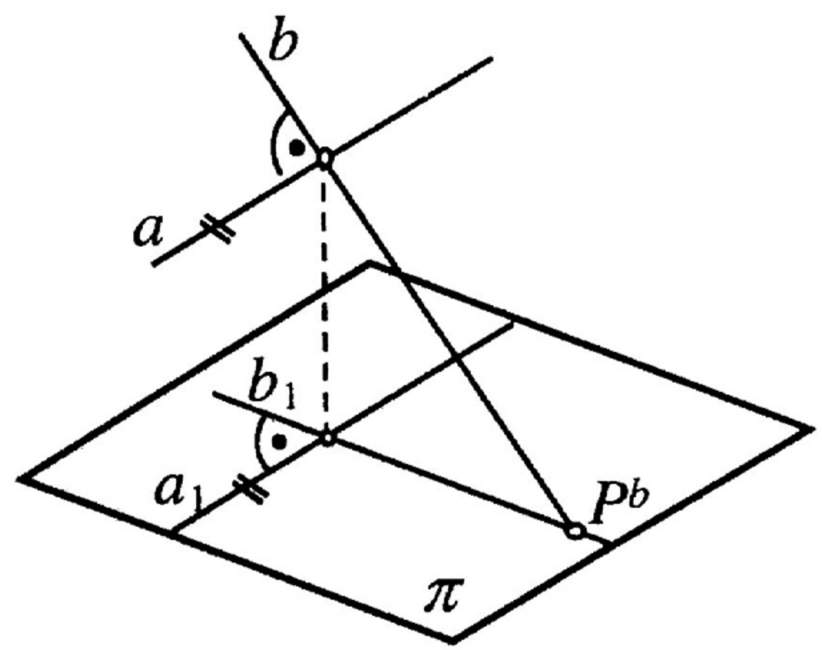
$$|A_1B_1| = |AB|.$$

Vo všetkých ostatných prípadoch je kolmý priemet úsečky kratší ako pôvodná úsečka.

**Poznámka:** V premietaní, ktoré nie je kolmé sa môže stať, že priemet úsečky je dlhší ako pôvodná úsečka.



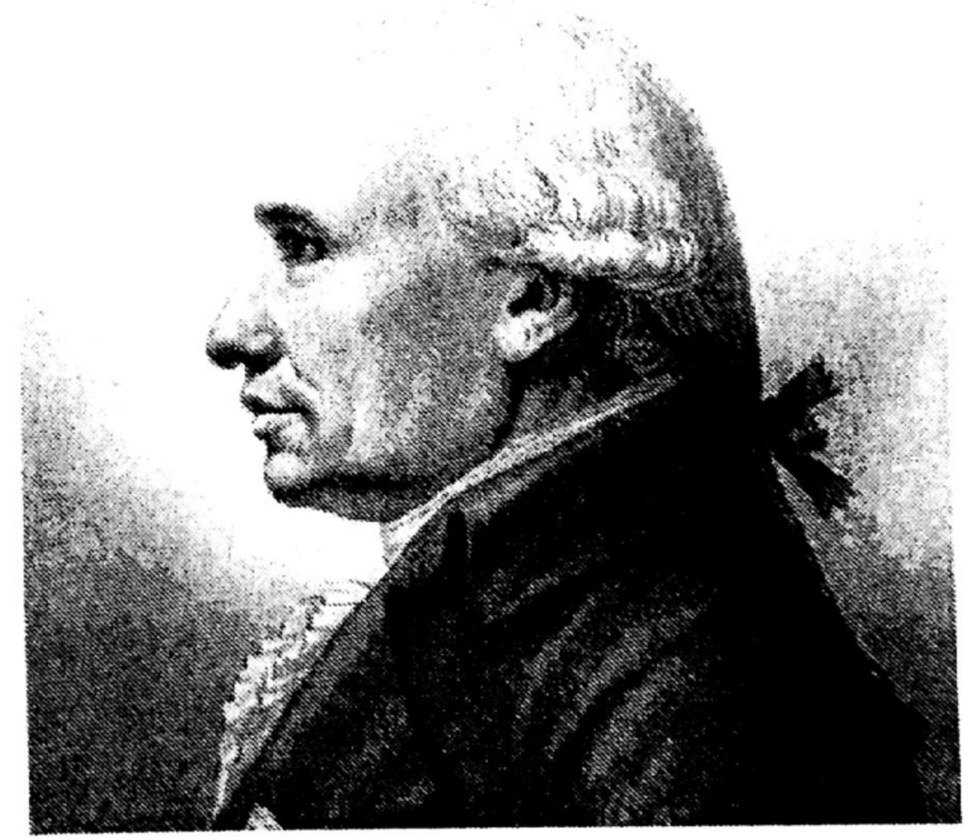

Obr. 3.3.1




Obr. 3.3.2

# 4 MONGEOVA PROJEKCIA 1. časť

Jeden z cieľov deskriptívnej geometrie je zobrazenie priestorových objektov do roviny a to tak, aby obraz objektu bolo možné zostrojiť pomerne jednoducho, aby bol názorný a aby bolo možné z obrazu pôvodný objekt zrekonštruovať. Pri štúdiu na Stavebnej fakulte a Fakulte architektúry v Bratislave budete mať možnosť spoznať viacero zobrazovacích metód. V tejto kapitole sa budeme zaoberať metódou založenou na dvoch kolmých premietaniach, ktorá sa nazýva Mongeova projekcia podľa významného francúzskeho geometra a matematika Gasparda Monge (1746 až 1818). Gaspard Monge je považovaný za zakladateľa deskriptívnej geometrie, zaviedol použitie dvoch premietaní do dvoch združených priemetní, čo umožnilo riešiť úlohy o veľkosti, tvare a vzájomnej polohe priestorových objektov.



V úvodných častiach tejto kapitoly budeme charakterizovať pojem Mongeova projekcia a ukážeme, ako sa zostrojí obraz základných geometrických útvarov v Mongeovej projekcii. Ďalej sa budeme zaoberať polohovými a metrickými úlohami a veľkú pozornosť budeme venovať zobrazeniu rovinných útvarov a telies. V poslednej časti ukážeme použitie tretej priemetne pri riešení úloh.

**Mongeova projekcia**

- dvojica kolmých premietaní do dvoch vzájomne kolmých priemetní

# 4.1 Obraz bodu v Mongeovej projekcii

Zjednodušene môžeme povedať, že Mongeova projekcia je dvojica kolmých premietaní do dvoch navzájom kolmých priemetní. Rovnobežné premietanie nie je bijektívne zobrazenie, a teda z jedného priemetu bodu nie je možné určiť jeho polohu v priestore, preto je potrebné zadať doplňujúcu informáciu o bode. Ak touto informáciou bude ďalší kolmý priemet bodu do priemetne kolmej na prvú priemetňu, tak dostaneme Mongeovu projekciu.

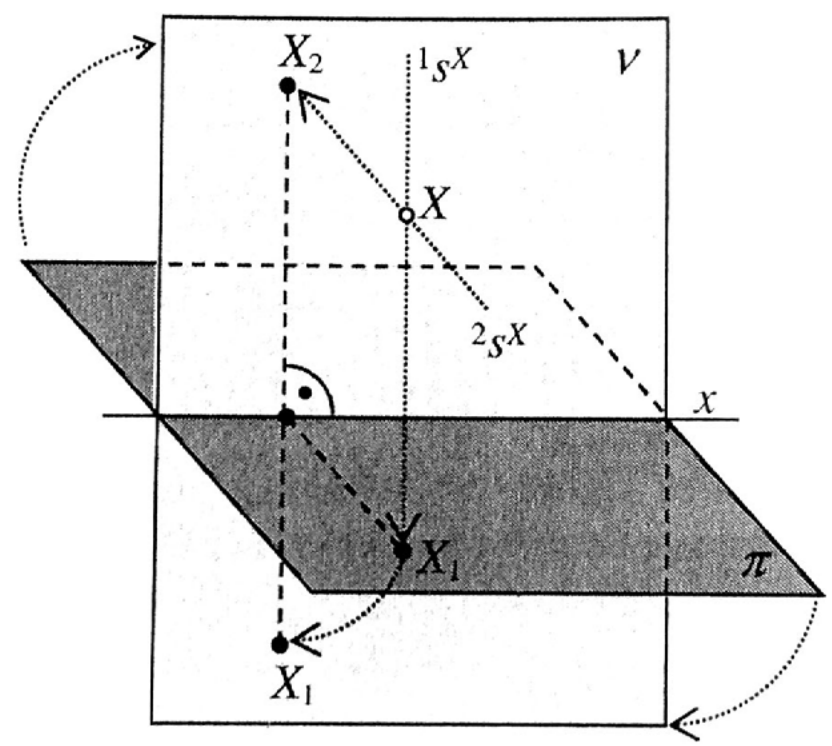
Charakteristika Mongeovej projekcie: prvú priemetňu volíme vo vodorovnej polohe, nazývame ju **pôdorysňa** a označujeme ju $\pi$, druhú priemetňu volíme v zvislej polohe, nazývame ju **nárysňa** a označujeme ju $\nu$, $\pi \perp \nu$. Priesečnicu rovín $\pi$ a $\nu$ nazývame **základnica** alebo os $x$.

Nech $X \in \mathbb{E}^3$. Zostrojíme dva kolmé priemety bodu $X$, prvý priemet je kolmý priemet do pôdorysne, označíme ho $X_1$, druhý priemet je kolmý priemet do nárysne, označíme ho $X_2$, tým sme dostali usporiadanú dvojicu bodov $[X_1, X_2]$, $X_1 \in \pi$, $X_2 \in \nu$. Za nákresňu budeme považovať rovinu $\nu$ (nárysňu). Priemety $X_1$, $X_2$ združíme tak, že prvú priemetňu otočíme do druhej priemetne okolo osi $x$ (Obr. 4.1.1a), toto otočenie nazývame **združenie priemetní**. Bod $X_1 \in \pi$ sa združením priemetní otočí do bodu v nárysni, ktorý opäť označíme $X_1$. Výsledkom je usporiadaná dvojica bodov $[X_1, X_2]$ v nárysni, pričom platí $X_1X_2 \perp x$. Ku každému bodu v priestore vieme jednoznačne priradiť usporiadanú dvojicu bodov v nárysni.

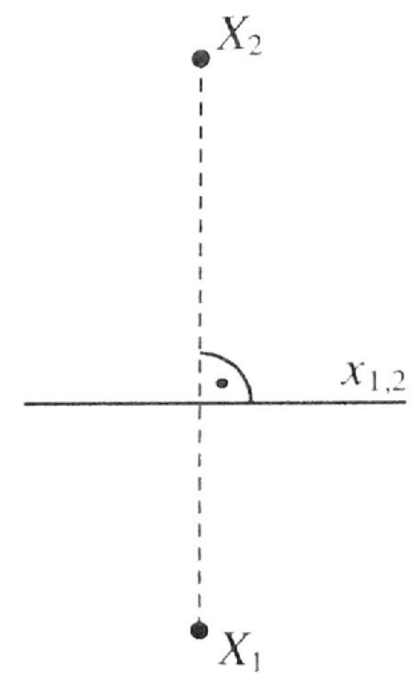
A naopak, ak máme usporiadanú dvojicu bodov $[X_1, X_2]$ v nárysni, pre ktorú platí $X_1X_2 \perp x$, vieme k nej jednoznačne priradiť bod $X$ v priestore.

Usporiadaná dvojica bodov $[X_1, X_2]$ v nárysni, pre ktorú platí $X_1X_2 \perp x$ je obrazom bodu $X$ v Mongeovej projekcii, hovoríme tiež, že body $X_1$, $X_2$ sú **združené priemety** bodu $X$. Spojnicu $X_1X_2$ nazývame **ordinála** bodu $X$.

Obr. 4.1.1b predstavuje obraz bodu $X$ v Mongeovej projekcii. Pre priemety osi $x$ platí: $x_1 = x_2$, budeme používať označenie $x_{1,2}$.




Obr. 4.1.1a




Obr. 4.1.1b

$\pi$ – pôdorysňa (prvá priemetňa)

$\nu$ – nárysňa (druhá priemetňa)

$x$ – základnica, os $x$

$X_1$ – pôdorys (prvý priemet) bodu $X$

$X_2$ – nárys (druhý priemet) bodu $X$

$x_{1,2}$ – pôdorys aj nárys osi $x$,

$X_1X_2 \perp x_{1,2}$ – ordinála bodu $X$

${}^1s^X$, $X \in {}^1s^X \wedge {}^1s^X \perp \pi$ – prvá (pôdorysne) premietacia priamka bodu $X$

${}^2s^X$, $X \in {}^2s^X \wedge {}^2s^X \perp \nu$ – druhá (nárysne) premietacia priamka bodu $X$

**Definícia 4.1.1:** Nech $\pi$ a $\nu$ sú dve kolmé roviny v priestore $\mathbb{E}^3$. Mongeova projekcia je vzájomne jednoznačné zobrazenie bodov priestoru $\mathbb{E}^3$ na usporiadané dvojice združených priemetov bodov v nárysni.

${}^{1}s^{X}$, $X \in {}^{1}s^{X} \wedge {}^{1}s^{X} \perp \pi$ – prvá (pôdorysne) premietacia priamka bodu $X$

${}^{2}s^{X}$, $X \in {}^{2}s^{X} \wedge {}^{2}s^{X} \perp \nu$ – druhá (nárysne) premietacia priamka bodu $X$

**Definícia 4.1.1:** Nech $\pi$ a $\nu$ sú dve kolmé roviny v priestore $\mathbb{E}^3$. Mongeova projekcia je vzájomne jednoznačné zobrazenie bodov priestoru $\mathbb{E}^3$ na usporiadané dvojice združených priemetov bodov v nárysni.

## Súradnice bodu

Na určenie polohy bodu v priestore používame súradnicovú sústavu. Súradnicové roviny $\pi$, $\nu$, $\mu$ sú určené takto: $\pi$ – pôdorysňa, $\nu$ – nárysňa, $\mu$; $\mu \perp \pi$ a $\mu \perp \nu$, rovinu $\mu$ nazývame bokorysňa alebo tretia hlavná priemetňa. Priesečník súradnicových rovín $O = \pi \cap \nu \cap \mu$ je začiatok súradnicovej sústavy, priesečnice súradnicových rovín $x = \pi \cap \nu$, $y = \pi \cap \mu$, $z = \nu \cap \mu$ sú súradnicové osi. Budeme používať pravotočivú súradnicovú sústavu, t. j. súradnicové osi sú orientované tak ako to môžeme vidieť na Obr. 4.1.2a.

Každému bodu $A \in \mathbb{E}^3$ vieme priradiť okrem pôdorysu $A_1$ a nárysu $A_2$ aj tretí priemet $A_3$, je to kolmý priemet bodu $A$ do bokorysne, nazývame ho bokorys bodu $A$. Priamka ${}^{3}s^{A}$ ($A \in {}^{3}s^{A} \wedge {}^{3}s^{A} \perp \mu$) je tretia (bokorysne) premietacia priamka bodu $A$.

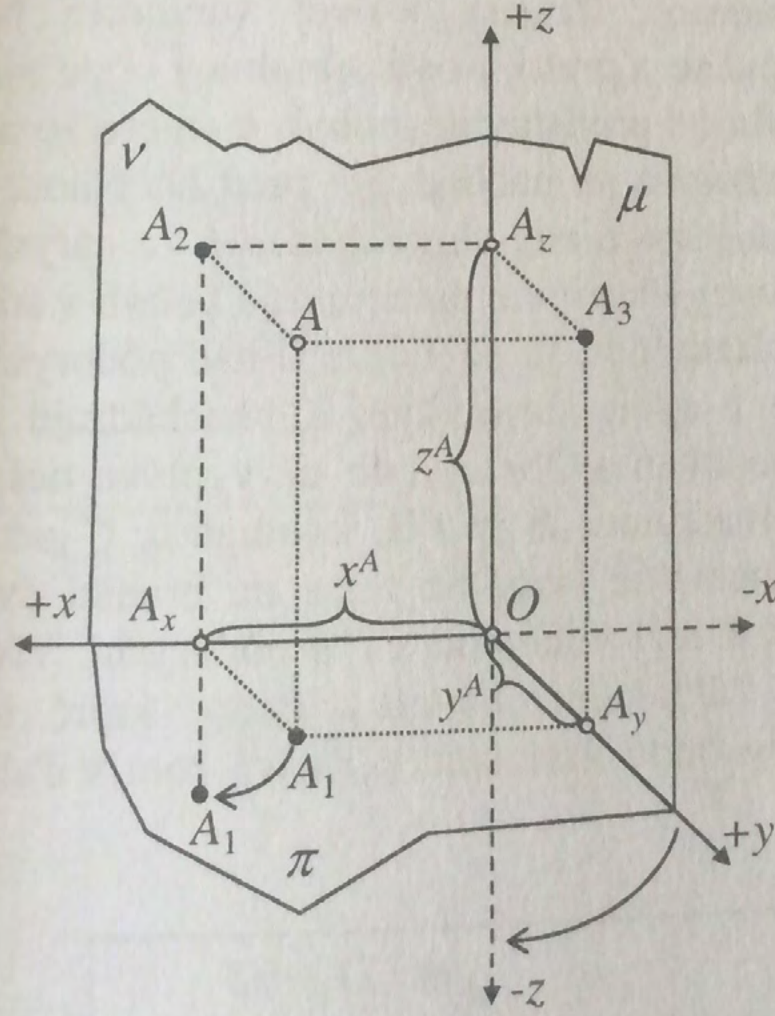
Pre bod $A$, ktorý neleží v žiadnej súradnicovej rovine (pozri Obr. 4.1.2a), tvoria body $A_1A_yOA_xAA_3A_zA_2$ vrcholy kvádra, ktorý nazývame súradnicový kváder bodu $A$. Pre súradnice bodu $A$ platí:

$$|x^A| = |A\mu| = |AA_3| = |OA_x|,$$

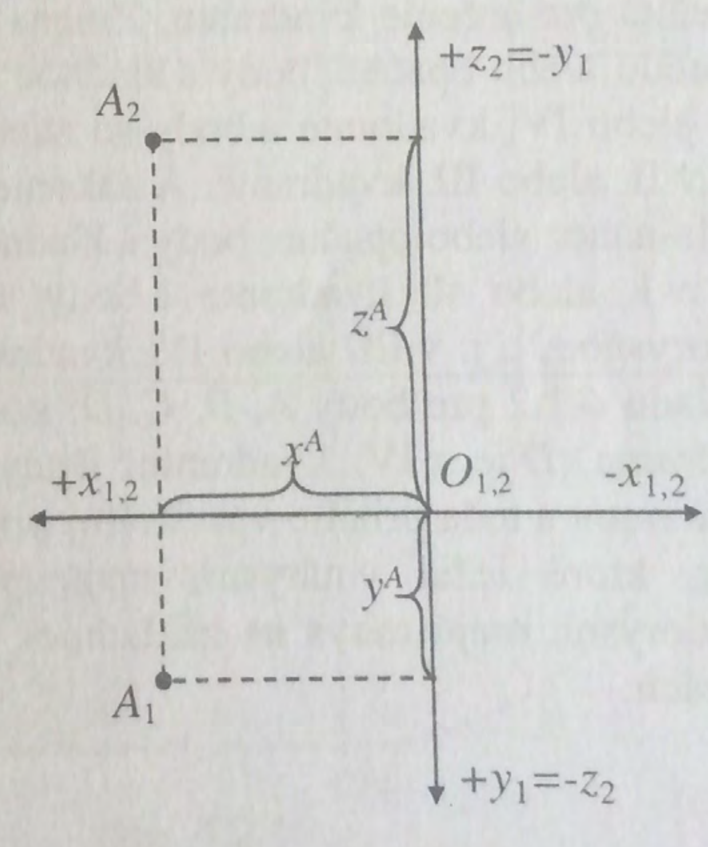
$$|y^A| = |A\nu| = |AA_2| = |A_1A_x| = |OA_y|,$$

$$|z^A| = |A\pi| = |AA_1| = |A_2A_x| = |OA_z|.$$

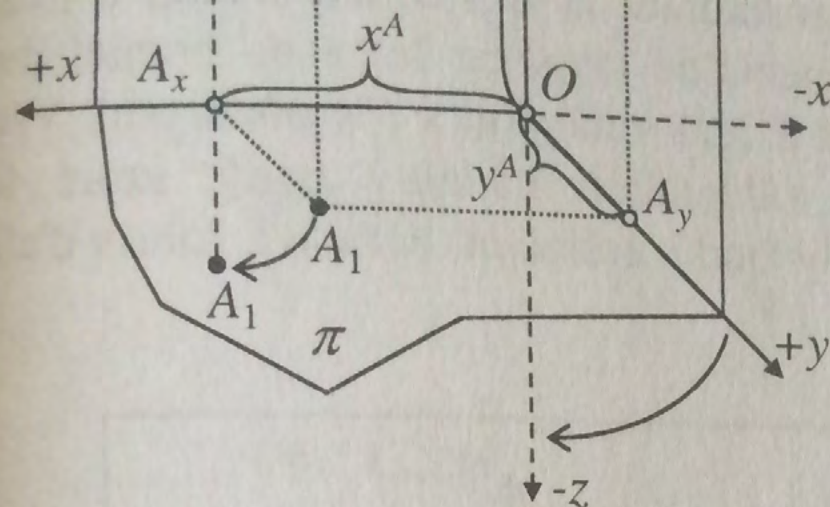
Súradnice bodu $A \in \mathbb{E}^3$ sú orientované vzdialenosti bodu $A$ od súradnicových rovín. Obr. 4.1.2b vyjadruje situáciu z priestorového Obr. 4.1.2a po združení prvej a druhej priemetne. Prvú a druhú priemetňu združíme tak, že kladná polos $+y$ splynie so zápornou polosou -z. Súradnice združených priemetov bodu $A$ sú $A_1[x^A; y^A]$, $A_2[x^A; z^A]$.



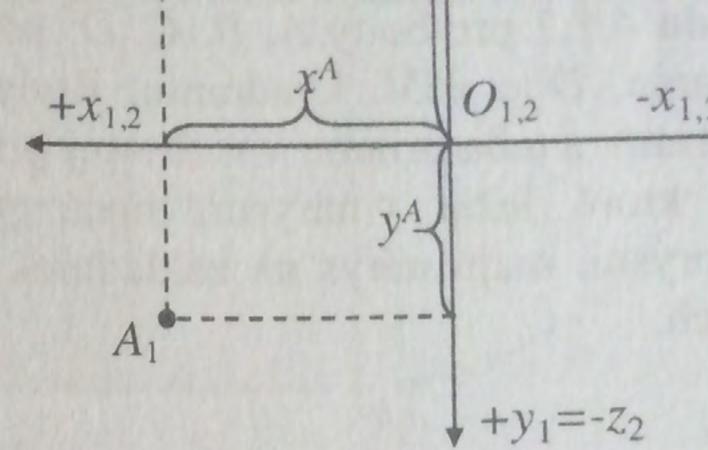
Obr. 4.1.2a



Obr. 4.1.2b



Obr. 4.1.2a



Obr. 4.1.2b

**Kvadranty**

Pôdorysňa a nárysňa delia priestor na 4 časti, ktoré voláme kvadranty. Kvadranty očíslujeme tak ako je to znázornené na Obr. 4.1.3, t. j. I. kvadrant je časť priestoru nad pôdorysňou a pred nárysňou, kde y > 0 a z > 0. Ostatné kvadranty sú charakterizované:

II. kvadrant – nad pôdorysňou a za nárysňou,

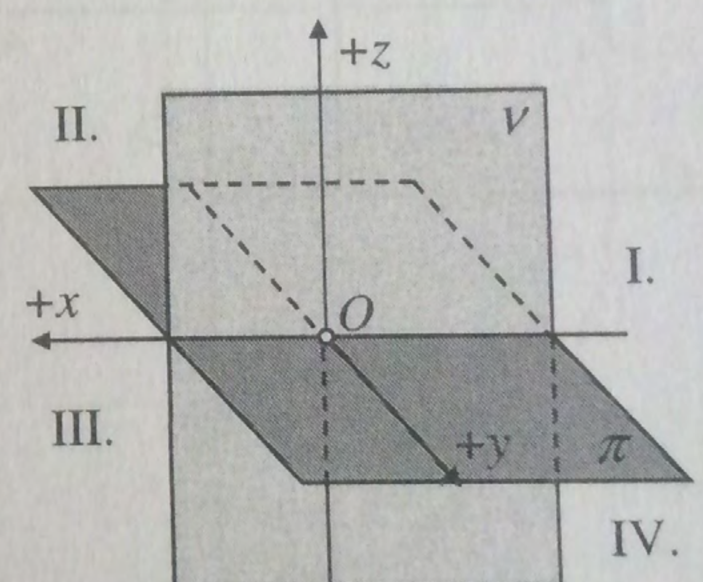
y < 0 a z > 0,

III. kvadrant – pod pôdorysňou a za nárysňou,

y < 0 a z < 0,

IV. kvadrant – pod pôdorysňou a pred nárysňou,

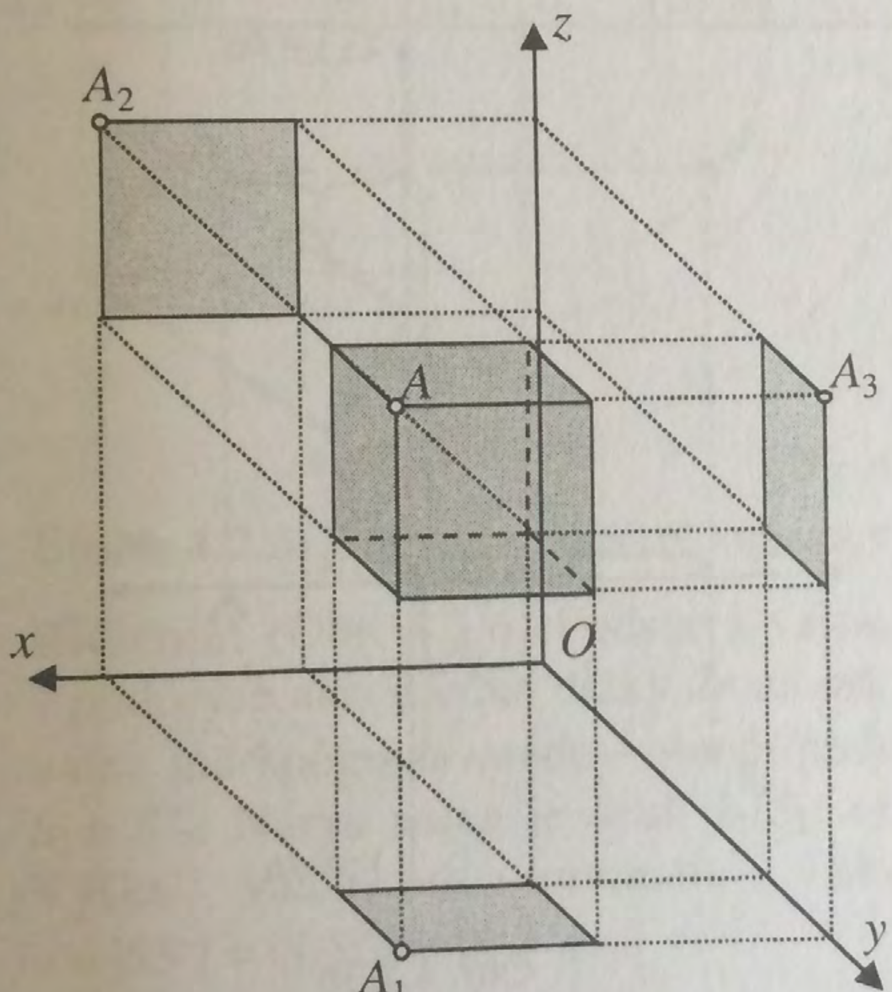
y > 0 a z < 0.



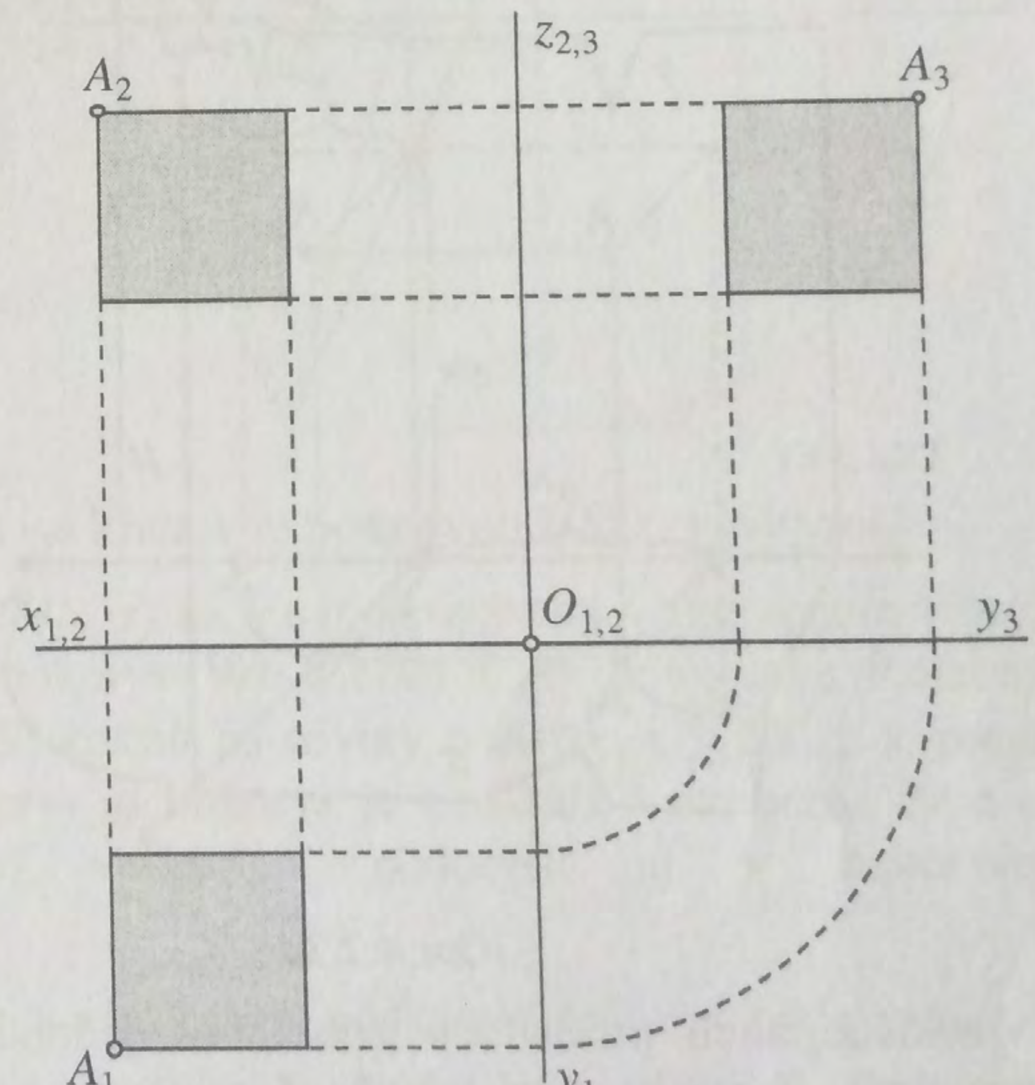
Obr. 4.1.3

## 4.2 Bokorysňa

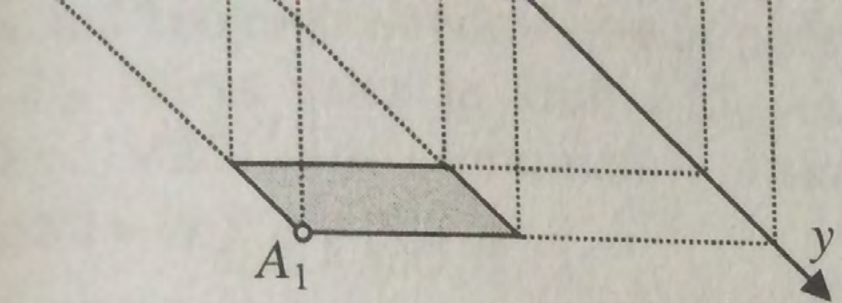
Bokorysňa je dôležitý nástroj, ktorý využívame napríklad vtedy, keď nám pôdorys a nárys nestačia na rýchlu identifikáciu objektu. Príkladom sú kocka a trojboký hranol zobrazené na Obr. 4.2.1a a 4.2.2a. Pôdorysy aj nárysy obidvoch telies sú zhodné štvorce, až podľa bokorysu (štvorec alebo trojuholník) je možné teleso identifikovať. Obr. 4.2.1b a 4.2.2b predstavujú trojicu združených priemetov týchto telies po združení priemetní. Konštrukcii trojice združených priemetov bodov, resp. telies je venovaná táto časť.



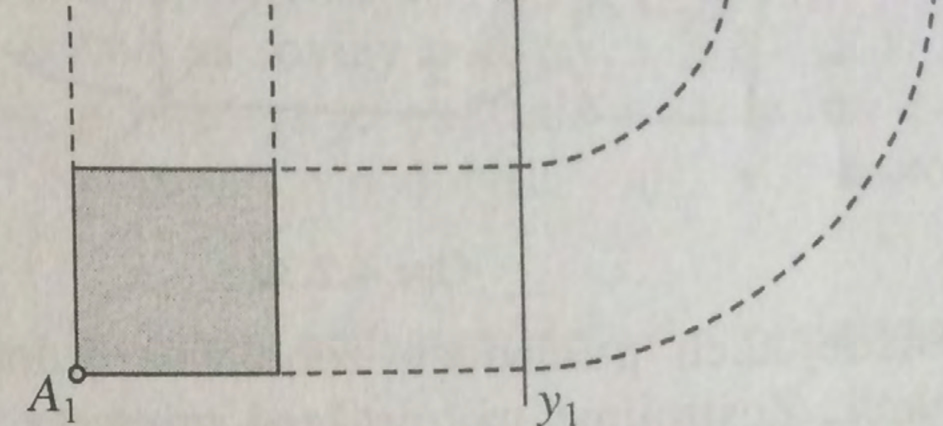

Obr. 4.2.1a



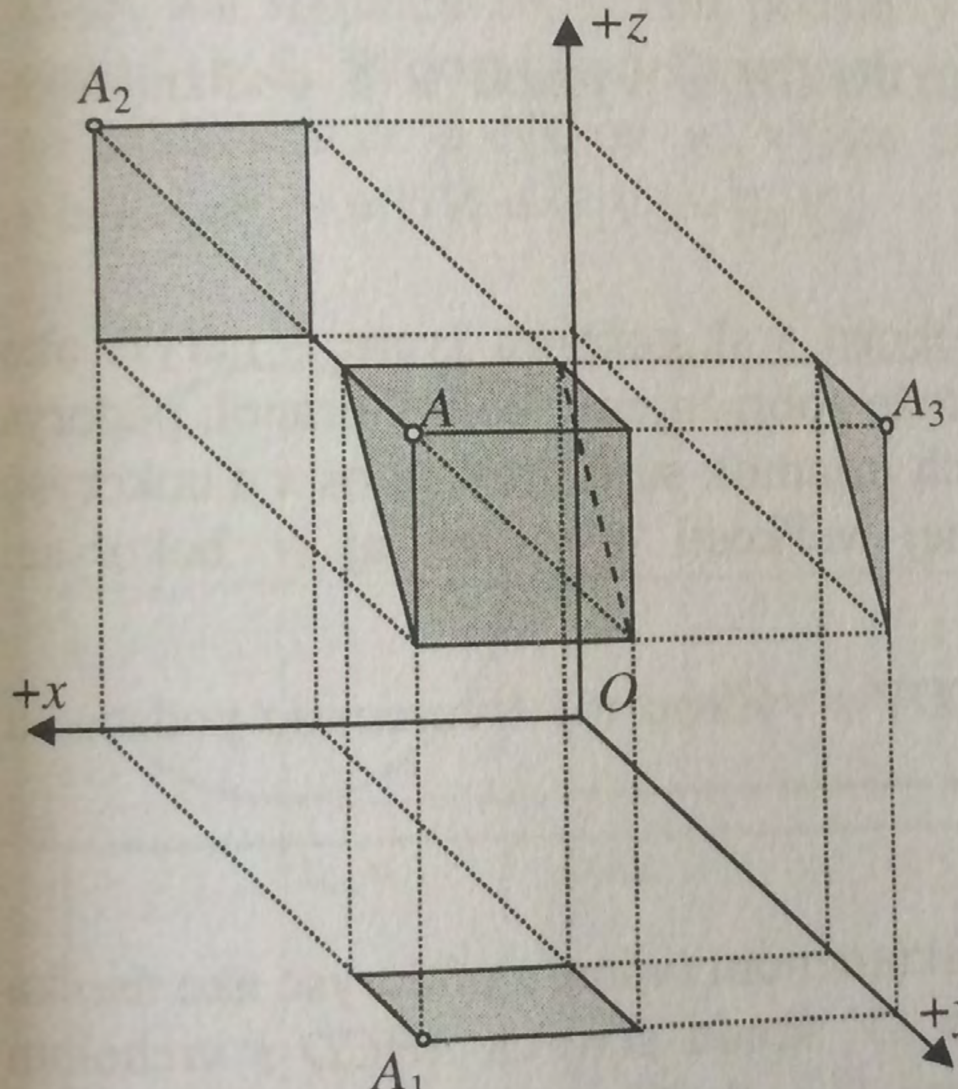

Obr. 4.2.1b



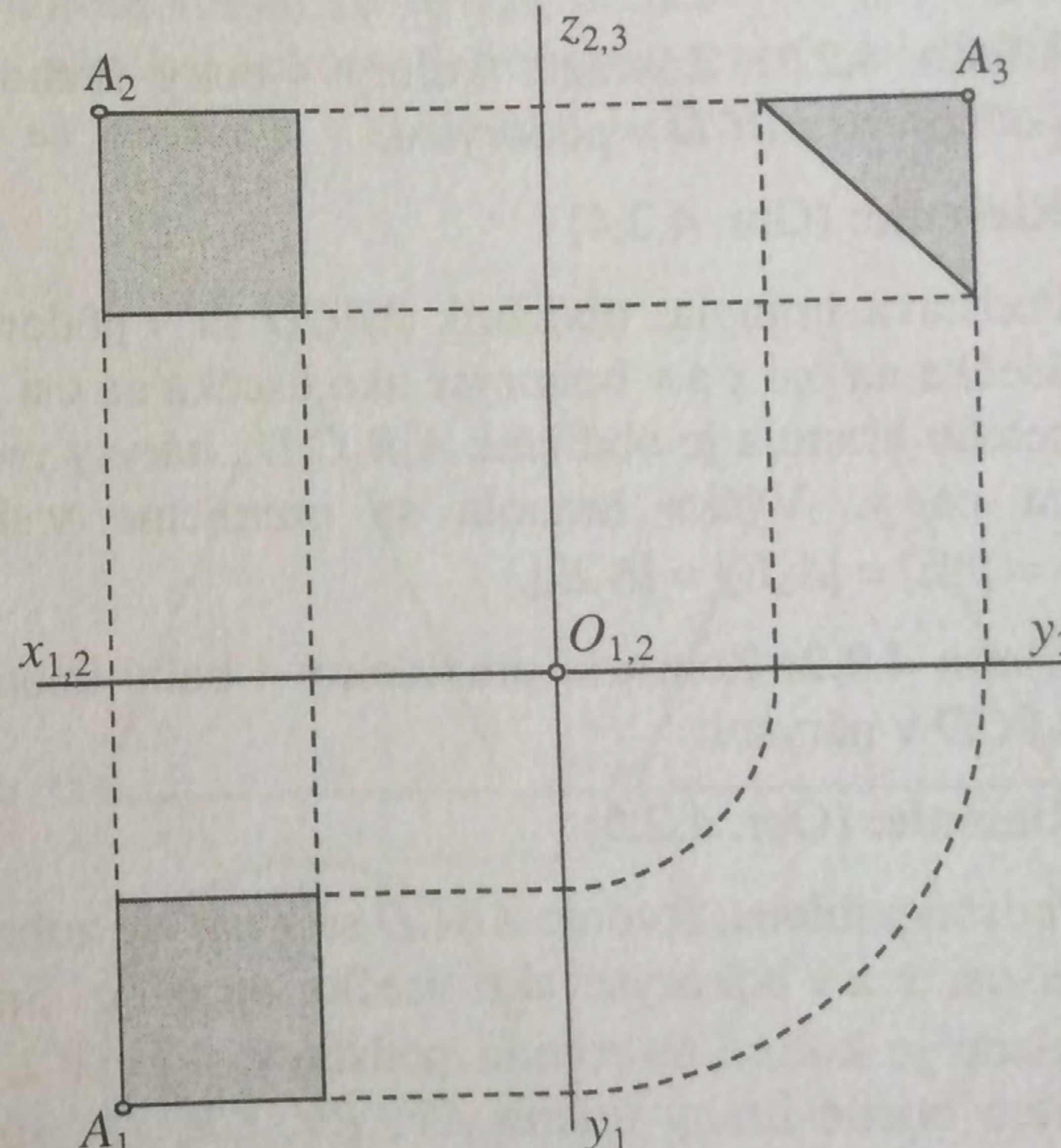

Obr. 4.2.1a




Obr. 4.2.1b



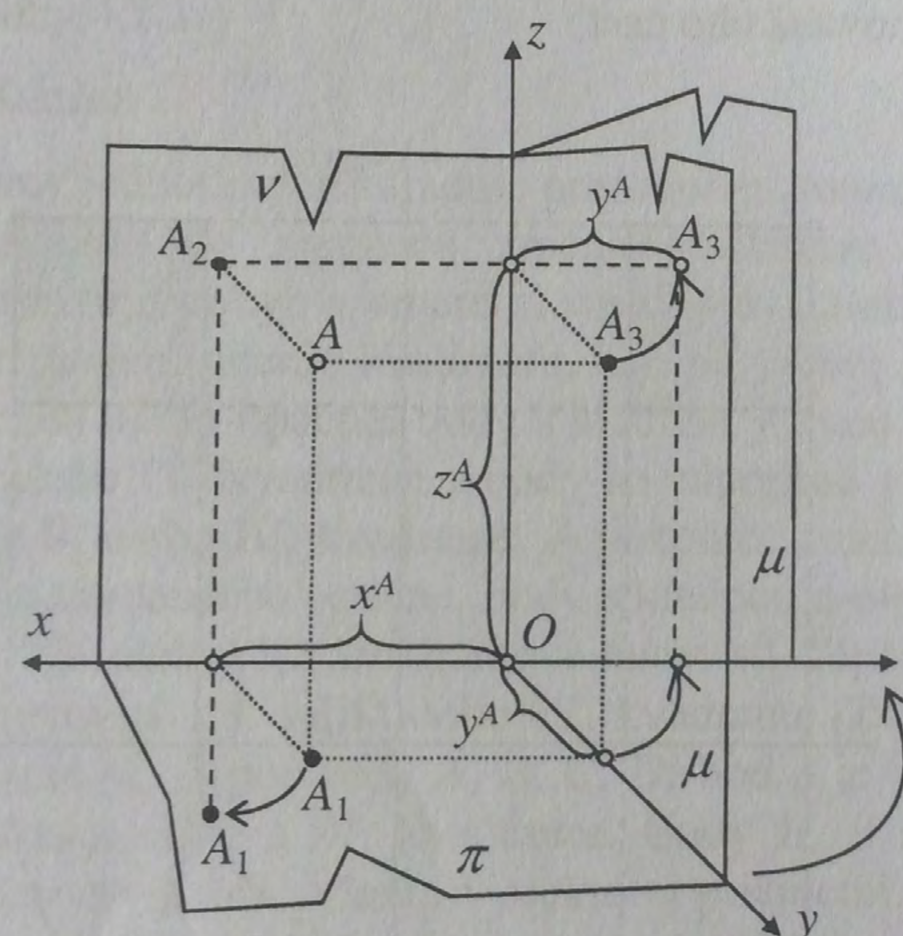

Obr. 4.2.2a



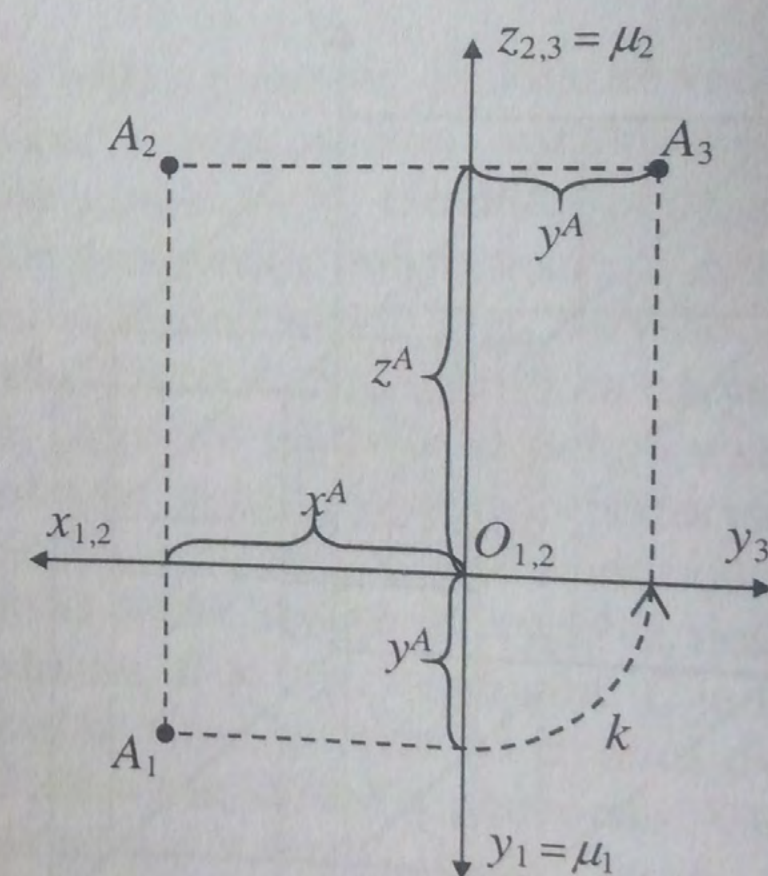

Obr. 4.2.2b

## Združenie bokorysne s nárysňou

Bokorysňu združíme s nárysňou otočením bokorysne do nárysne okolo osi $z$. Združenie priemetní a konštrukcia bokorysu bodu $A$ sú zobrazené na obrázku 4.2.3a. Spojnica $A_2A_3 \perp z$ je ordinála bodu $A$ spájajúca nárys s bokorysom a $|A_3, z| = |y^A|$. Na konštrukciu tretieho priemetu bodu zvyčajne používame postup znázornený na Obr. 4.2.3b, kde $k$ je kružnicový oblúk so stredom $O_{1,2}$ a polomerom $r = |y^A|$.

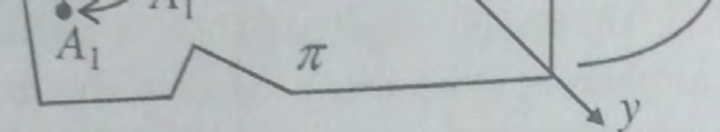



Obr. 4.2.3a

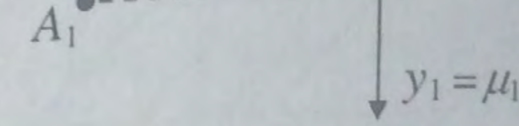



Obr. 4.2.3b

V nasledujúcich príkladoch zobrazíme jednoduché telesá (pozri kap. 2.4) v Mongeovej projekcii. Zostrojíme tri združené priemety hranola, ihlana, valca a kužeľa a s podstavou v pôdorysni alebo v nárysni. Cieľom týchto príkladov je rýchle intuitívne pochopenie princípu Mongeovej projekcie.




Obr. 4.2.3a




Obr. 4.2.3b

V nasledujúcich príkladoch zobrazíme jednoduché telesá (pozri kap. 2.4) v Mongeovej projekcii. Zostrojíme tri združené priemety hranola, ihlana, valca a kužeľa a s podstavou v pôdorysni alebo v nárysni. Cieľom týchto príkladov je rýchle intuitívne pochopenie princípu Mongeovej projekcie.

**Úloha 4.2.1:** Zobrazte kolmý 4-boký hranol $ABCDEFGH$ s výškou $v$ a obdĺžnikovou podstavou $ABCD$ v pôdorysni.

**Riešenie:** (Obr. 4.2.4)

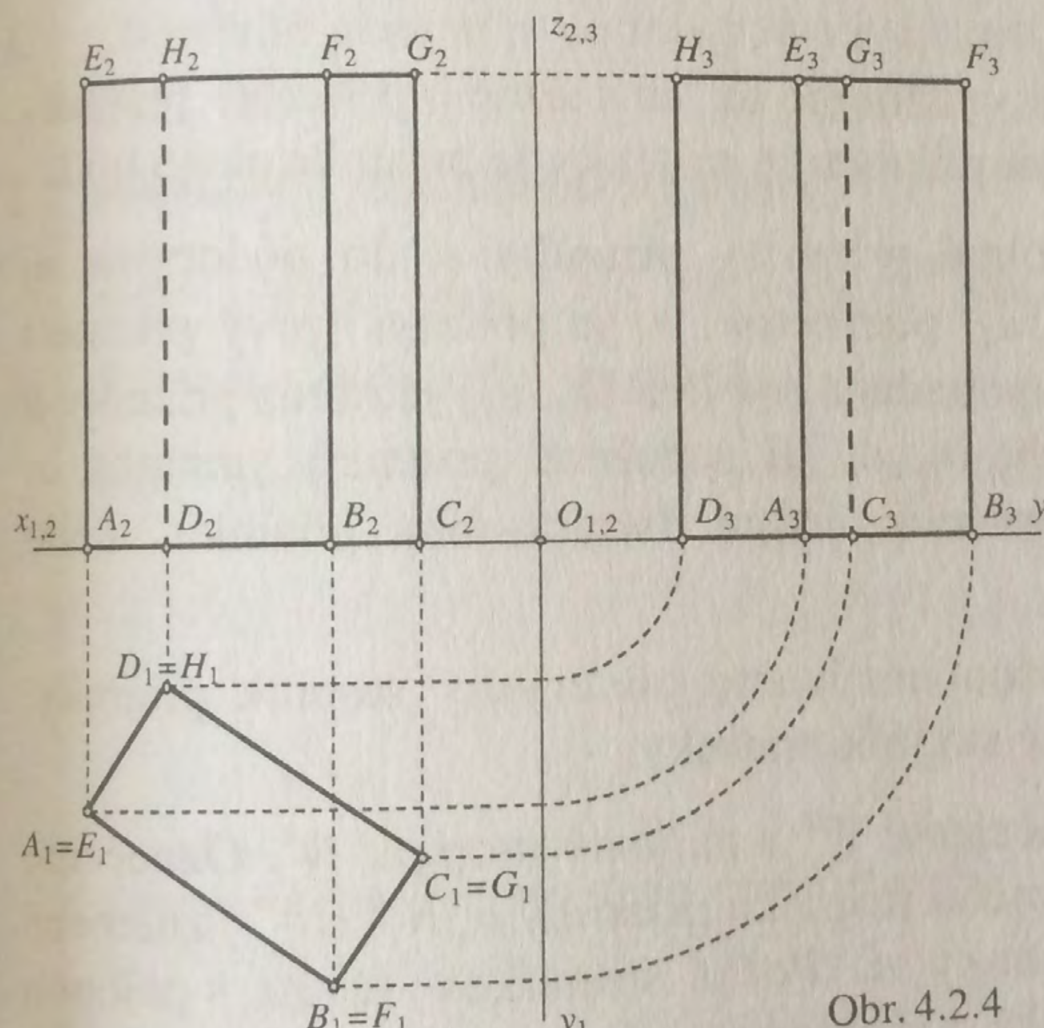
Podstava hranola, obdĺžnik $ABCD$ sa v pôdoryse zobrazí v skutočnom tvare, v náryse ako úsečka na osi $x$ a v bokoryse ako úsečka na osi $y$. Pretože zobrazujeme kolmý hranol, pôdorys celého hranola je obdĺžnik $A_1B_1C_1D_1$, nárysy tvoriacich priamok sú kolmé na os $x$ a bokorysy na os $y$. Výška hranola sa premietne v skutočnej veľkosti v náryse aj v bokoryse: $v = |AE| = |A_2E_2| = |A_3E_3|$.

**Úloha 4.2.2:** Zobrazte pravidelný 4-boký ihlan $ABCDV$ s výškou $v$ a štvorcovou podstavou $ABCD$ v nárysni.

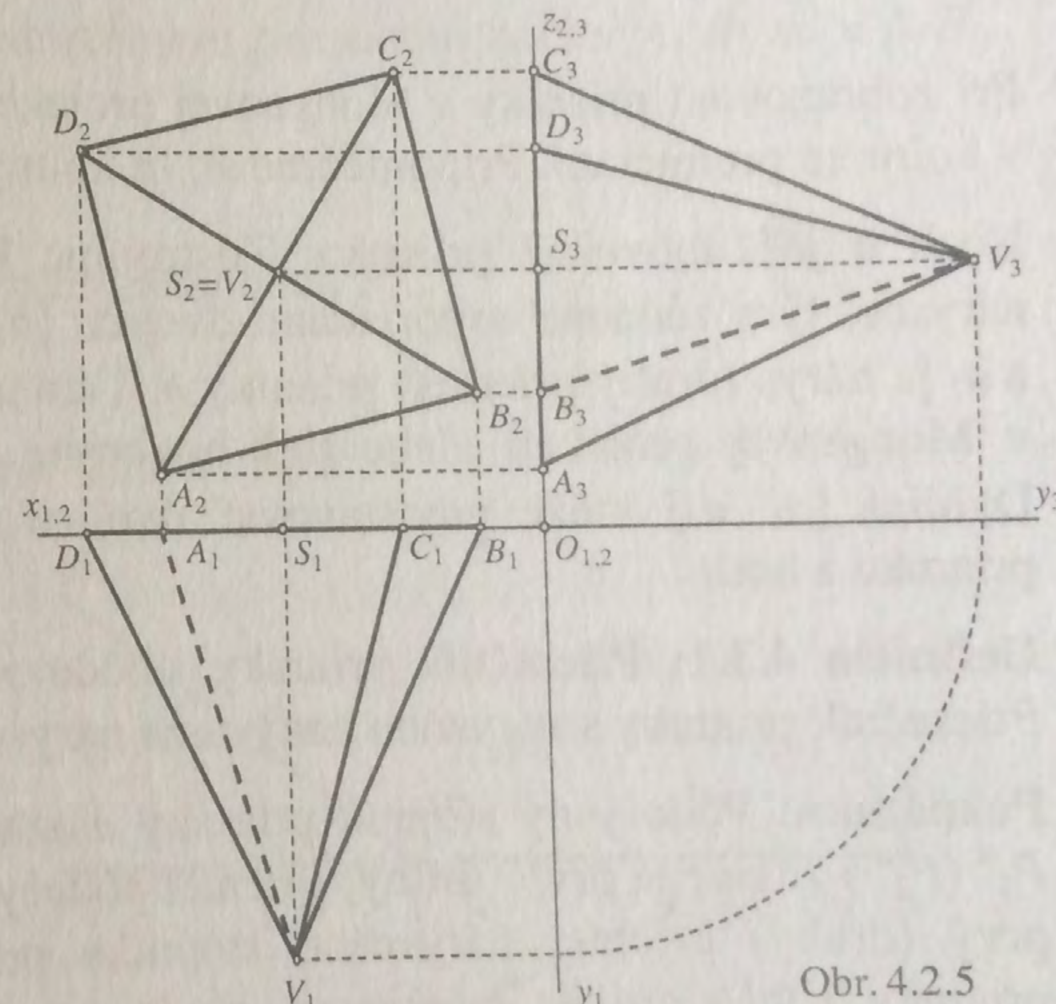
**Riešenie:** (Obr. 4.2.5)

Podstava ihlana, štvorec $ABCD$ sa v náryse zobrazí v skutočnom tvare, v pôdoryse ako úsečka na osi $x$ a v bokoryse ako úsečka na osi $z$. Spojnica $SV$ stredu štvorca $ABCD$ s vrcholom ihlanu je kolmá na rovinu podstavy, t. j. $SV \perp \nu$, preto $V_2 = S_2$. Vrchol $V$ je pred nárysňou, preto bočné hrany ihlanu $AV$, $BV$, $CV$, $DV$ sú v náryse viditeľné. Nárys ihlana je štvorec $A_2B_2C_2D_2$ s uhlopriečkami, pôdorys a bokorys je trojuholník. Výška sa premieta v skutočnej veľkosti v pôdoryse aj v bokoryse: $v = |SV| = |S_1V_1| = |S_3V_3|$.

ruženie
$_2A_3 \perp z$
retieho
žnicový



Obr. 4.2.4

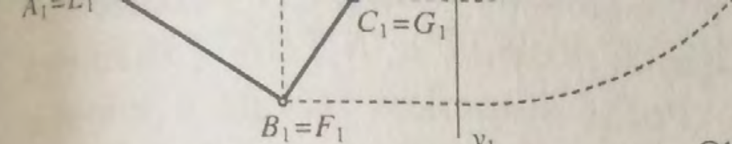


Obr. 4.2.5

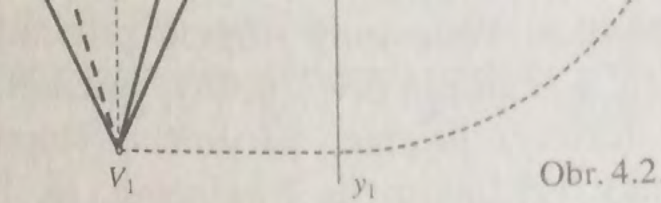
**Úloha 4.2.3:** Zobrazte rotačný valec s výškou $v$ a kruhovou podstavou $k(S; r)$ v nárysni.

**Riešenie:** (Obr. 4.2.6) Podstava valca, kruh $k(S; r)$ sa v náryse zobrazí v skutočnom tvare, v pôdoryse ako úsečka dĺžky $2r$ na osi $x$ a v bokoryse ako úsečka dĺžky $2r$ na osi $z$. Rotačný valec má spojnicu stredov oboch podstáv $SS'$ kolmú na roviny podstáv, t. j. $SS' \perp \nu$, preto $S_2 = S'_2$. Nárys valca je kruh $k_2(S_2; r)$, pôdorys aj bokorys je obdĺžnik s rozmermi $2r$ a $v$. Výška valca sa premieta v skutočnej veľkosti v pôdoryse aj v bokoryse:

$y_3$




Obr. 4.2.4



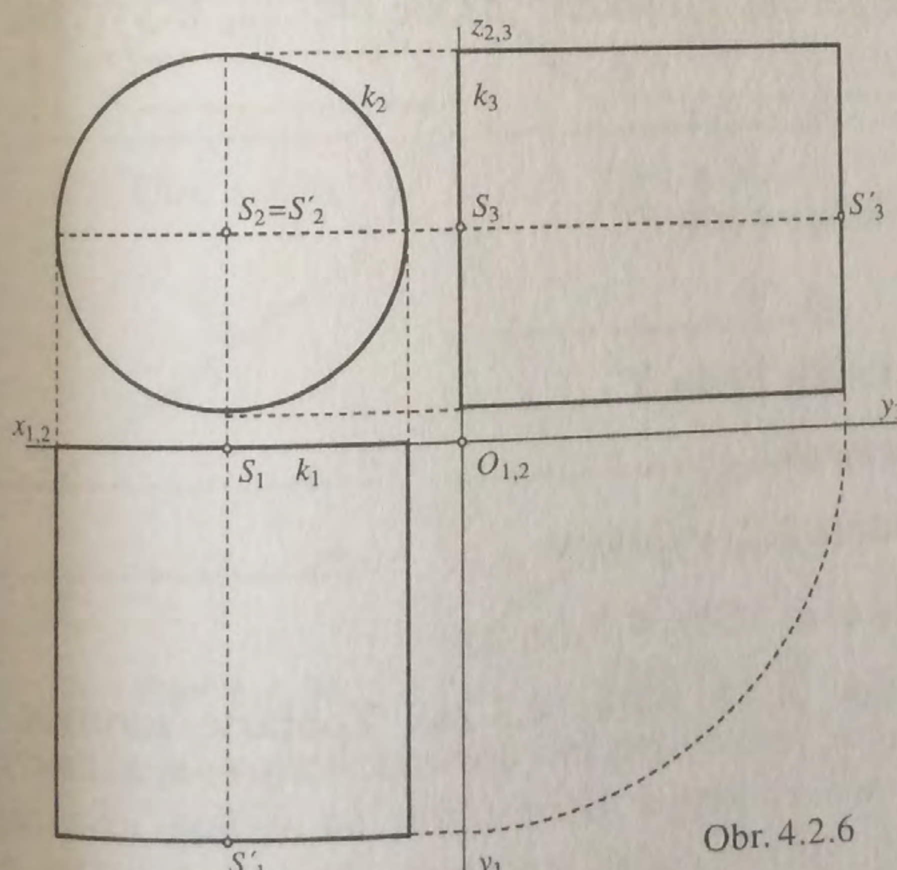

Obr. 4.2.5

**Úloha 4.2.3:** Zobrazte rotačný valec s výškou $v$ a kruhovou podstavou $k(S;\, r)$ v nárysni.

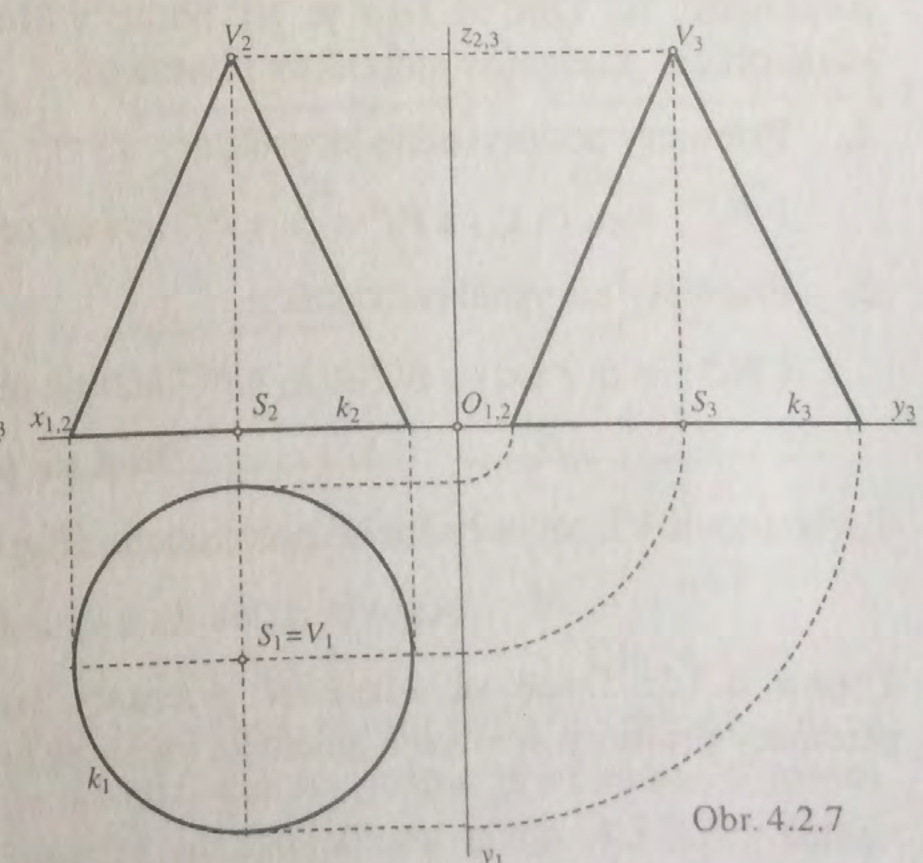
**Riešenie:** (Obr. 4.2.6) Podstava valca, kruh $k(S;\, r)$ sa v náryse zobrazí v skutočnom tvare, v pôdoryse ako úsečka dĺžky $2r$ na osi $x$ a v bokoryse ako úsečka dĺžky $2r$ na osi $z$. Rotačný valec má spojnicu stredov oboch podstáv $SS'$ kolmú na roviny podstáv, t. j. $SS' \perp \nu$, preto $S_2 = S'_2$. Nárys valca je kruh $k_2(S_2;\, r)$, pôdorys aj bokorys je obdĺžnik s rozmermi $2r$ a $v$. Výška valca sa premieta v skutočnej veľkosti v pôdoryse aj v bokoryse: $v = |SS'| = |S_1S'_1| = |S_3S'_3|$.

**Úloha 4.2.4:** Zobrazte rotačný kužeľ s výškou $v$ a kruhovou podstavou $k(S;\, r)$ v pôdorysni.

**Riešenie:** (Obr. 4.2.7) Podstava kužeľa, kruh $k(S;\, r)$ sa v pôdoyse zobrazí v skutočnom tvare, v náryse ako úsečka dĺžky $2r$ na osi $x$ a v bokoryse ako úsečka dĺžky $2r$ na osi $y$. Rotačný kužeľ má spojnicu $SV$ stredu podstavy s vrcholom kolmú na rovinu podstavy, t. j. $SV \perp \pi$, preto $V_1 = S_1$. Pôdorys kužeľa je kruh $k_1(S_1;\, r)$, nárys aj bokorys je rovnoramenný trojuholník so základňou $2r$ a výškou $v$. Výška kužeľa sa premieta v skutočnej veľkosti v náryse aj v bokoryse: $v = |SV| = |S_2V_2| = |S_3V_3|$.




Obr. 4.2.6




Obr. 4.2.7

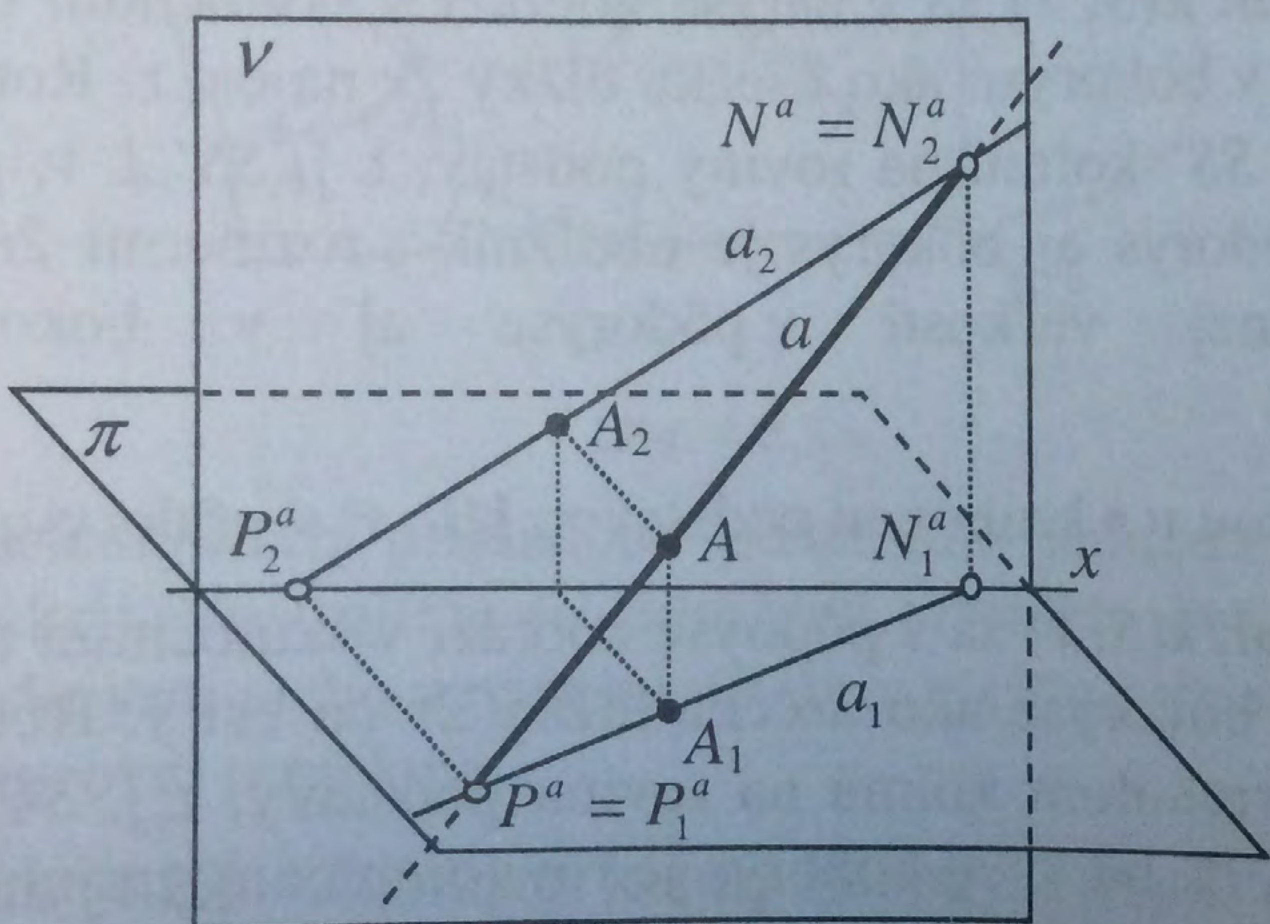
**Obraz priamky v Mongeovej projekcii**

- kolmým priemetom priamky je priamka, alebo bod

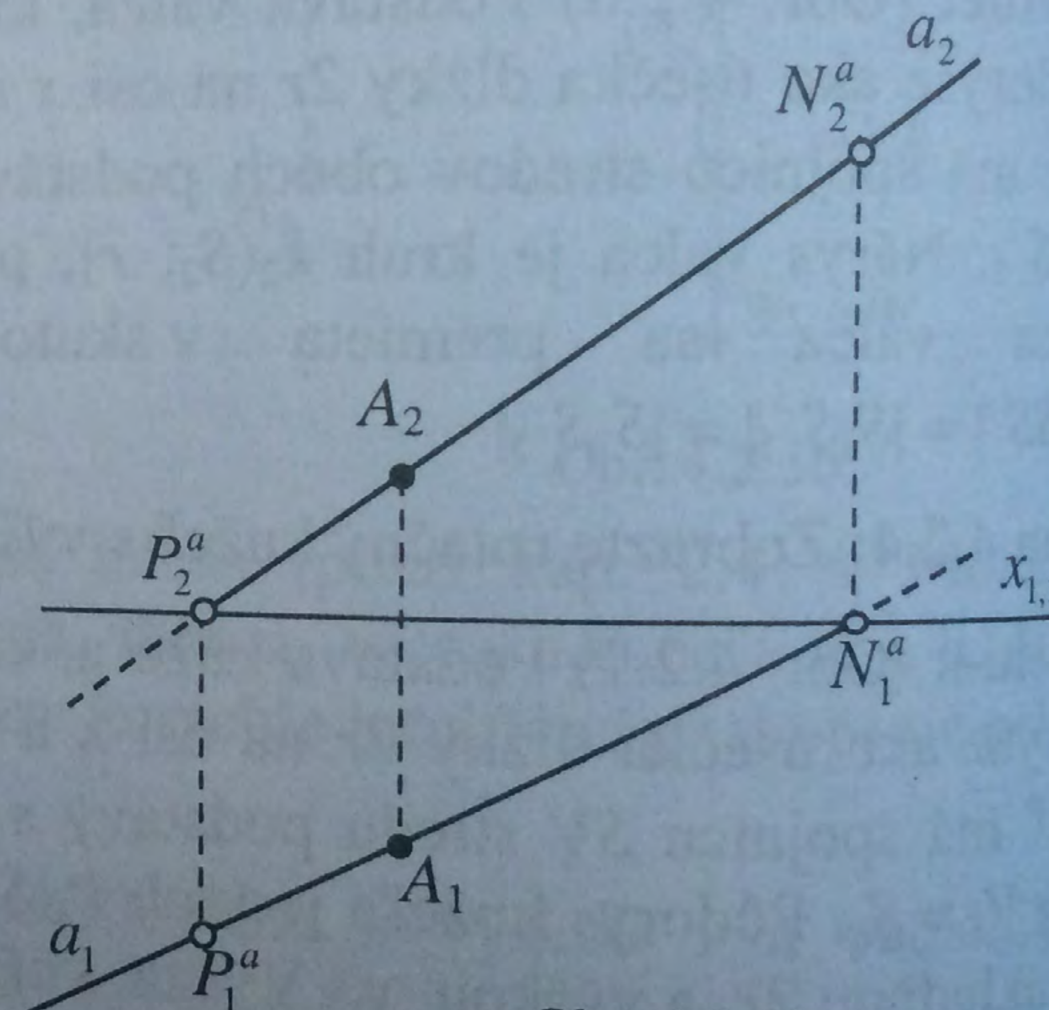
- priesečník priamky s pôdorysňou sa nazýva pôdorysný stopník, priesečník priamky s nárysňou sa nazýva nárysný stopník priamky priamku a bod.

**Definícia 4.3.1:** Priesečník priamky s pôdorysňou nazývame pôdorysný stopník priamky. Priesečník priamky s nárysňou nazývame nárysný stopník priamky.

**Poznámka:** Pôdorysný stopník priamky $a$ označujeme $P^a$ a nárysný stopník $N^a$. Označenie $P_1^{\,a}$ ($P_2^{\,a}$) znamená prvý (druhý) priemet pôdorysného stopníka priamky $a$, $N_1^{\,a}$ ($N_2^{\,a}$) znamená prvý (druhý) priemet nárysného stopníka priamky $a$. Počet stopníkov súvisí s polohou priamky vzhľadom na priemetne, ak je priamka s niektorou priemetňou rovnobežná, tak príslušný stopník neexistuje (Obr. 4.3.3a, b – Obr. 4.3.6a, b).



Obr. 4.3.1a

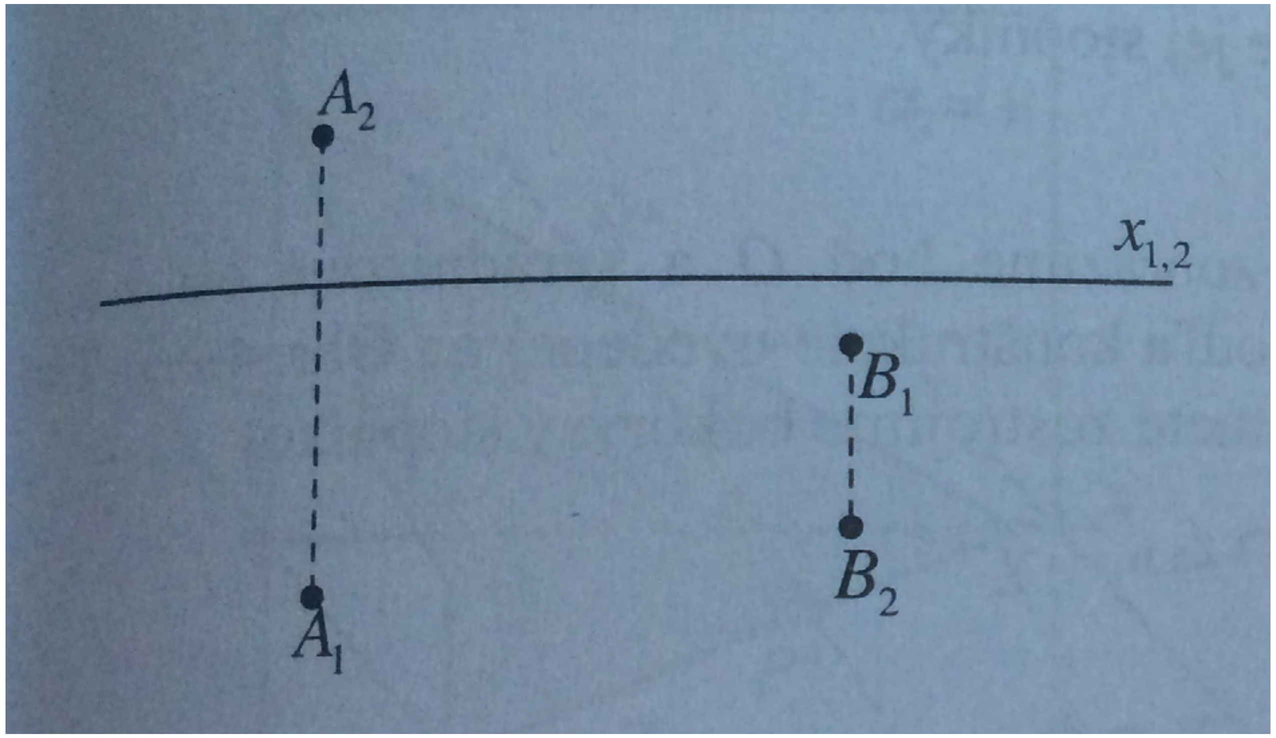


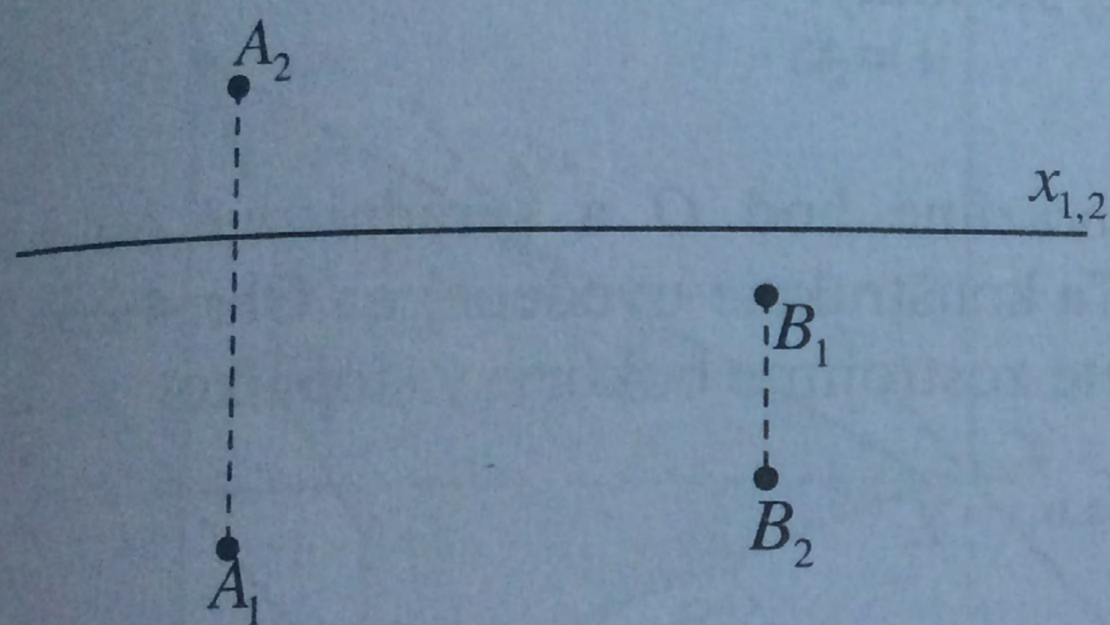
Obr. 4.3.1b

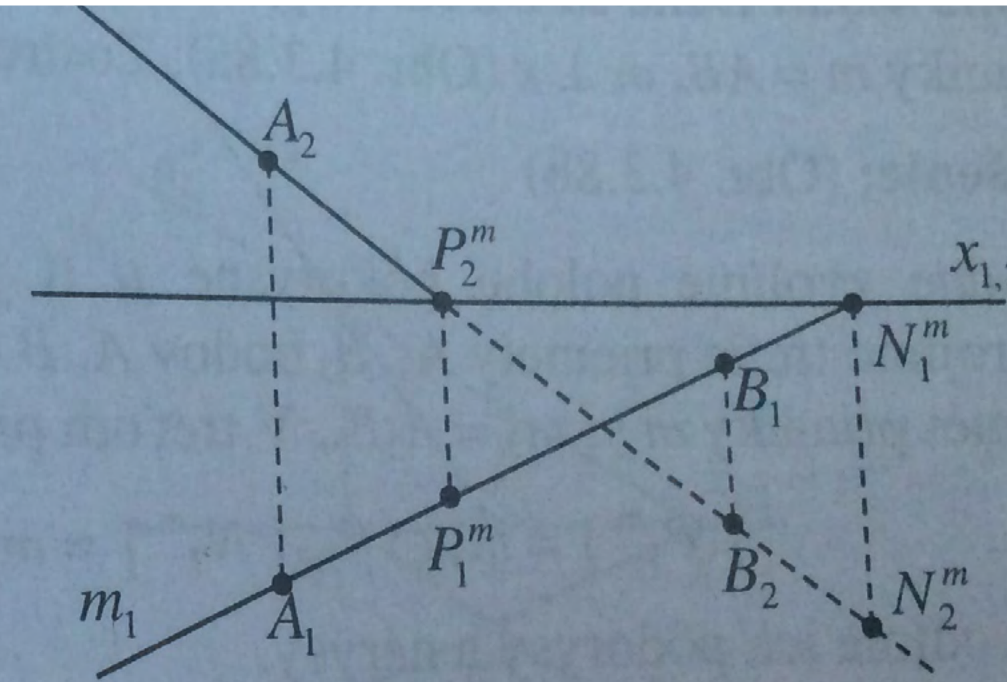
Na ilustračnom Obr. 4.3.1a je zobrazená priamka $a$ vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne, na Obr. 4.3.1b je jej obraz v Mongeovej projekcii. Z Obr. 4.3.1a, b vyplýva konštrukcia priemetov stopníkov priamky $a$:

Úloha:

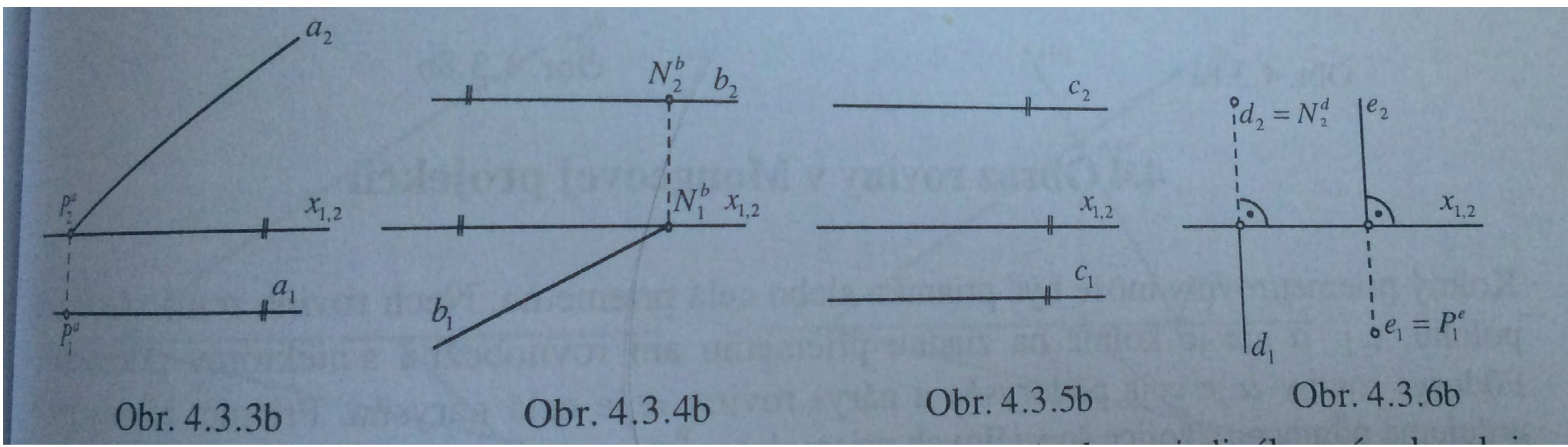
Dané sú združené priemety bodov A, B. Zostrojte združené priemety priamky AB a jej stopníky.




$A_2$
$x_{1,2}$
$B_1$
$B_2$
$A_1$

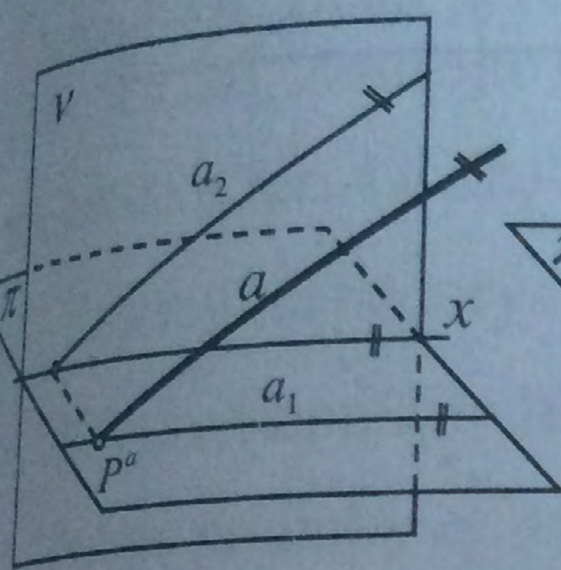

$A_2$
$P_2^m$
$x_{1,2}$
$N_1^m$
$B_1$
$P_1^m$
$B_2$
$N_2^m$
$m_1$
$A_1$

# Priamky v špeciálnych polohách



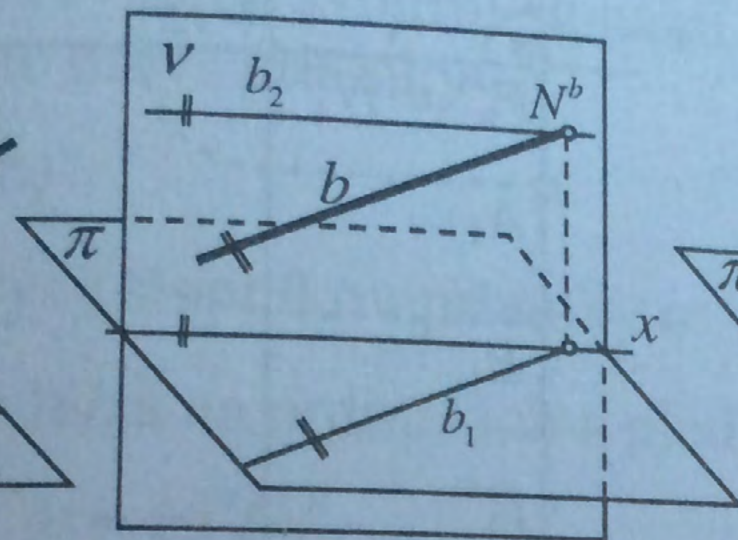

Obr. 4.3.3b Obr. 4.3.4b Obr. 4.3.5b Obr. 4.3.6b

$a \parallel \nu$



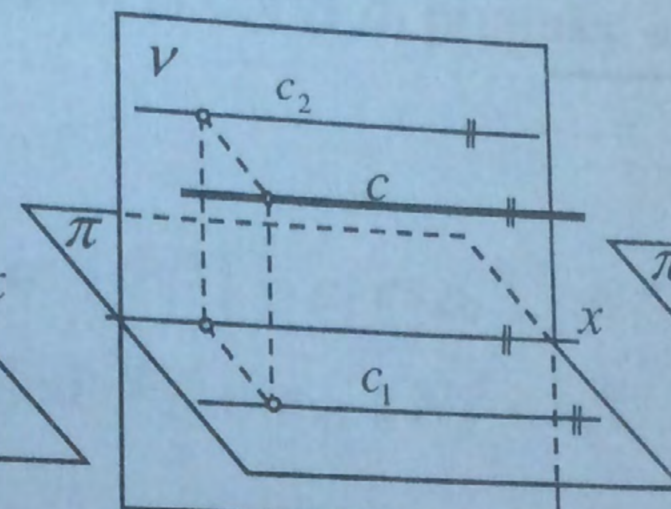

Obr. 4.3.3a

$b \parallel \pi$



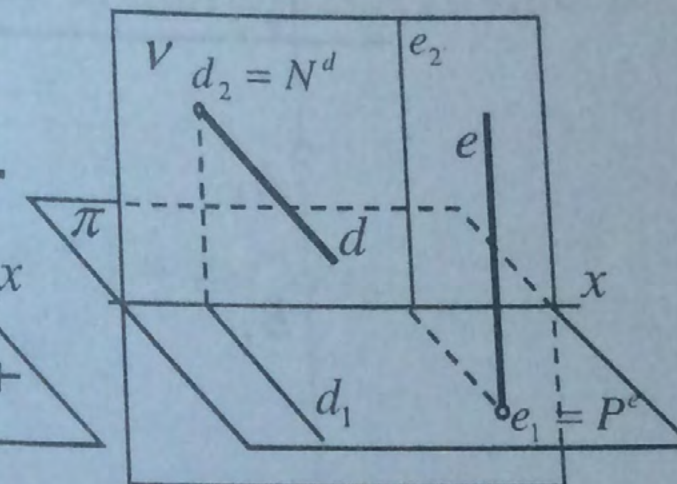

Obr. 4.3.4a

$c \parallel x$

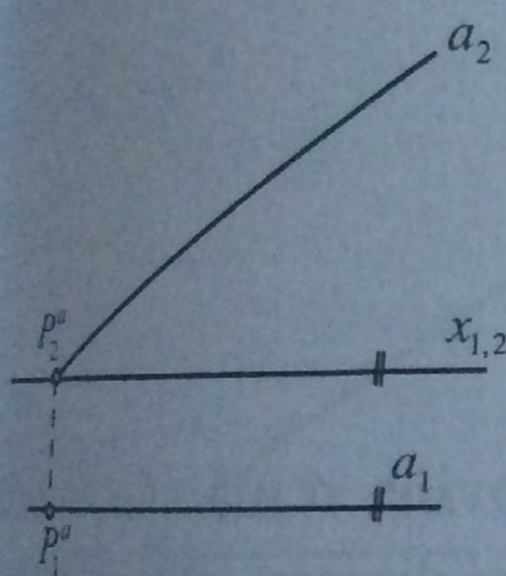



Obr. 4.3.5a

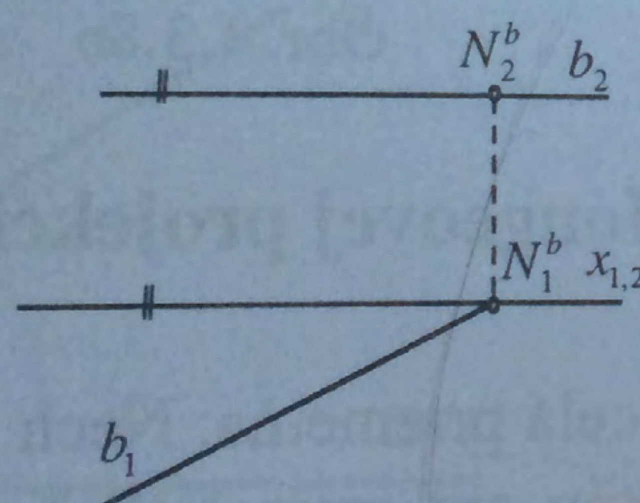
$d \perp \nu,\ e \perp \pi$



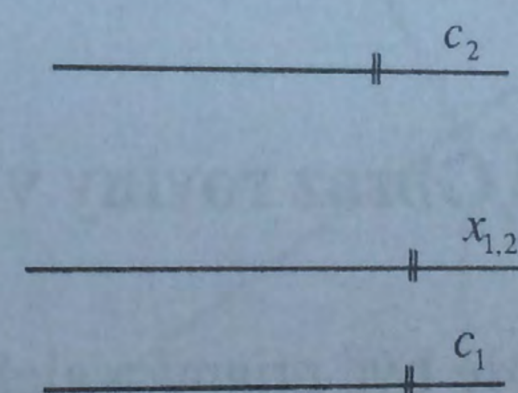

Obr. 4.3.6a



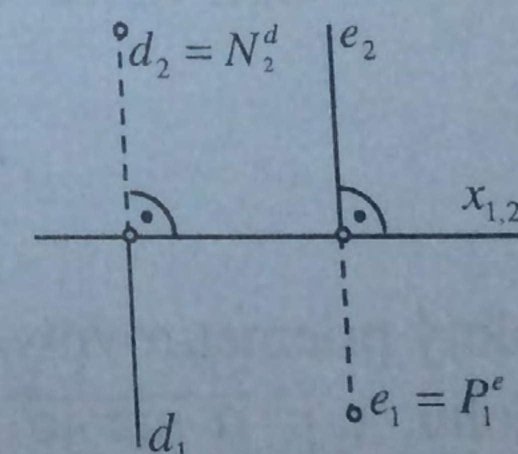

Obr. 4.3.3b




Obr. 4.3.4b



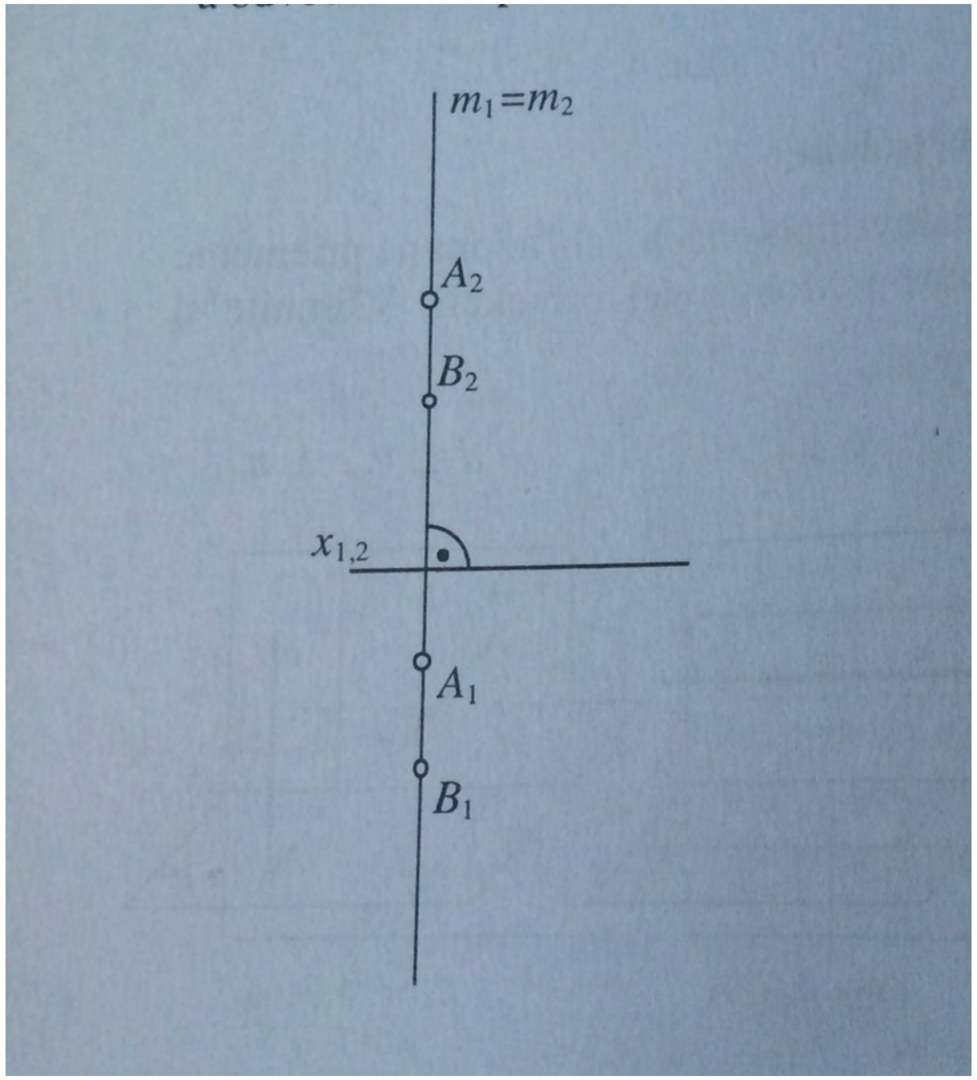

Obr. 4.3.5b

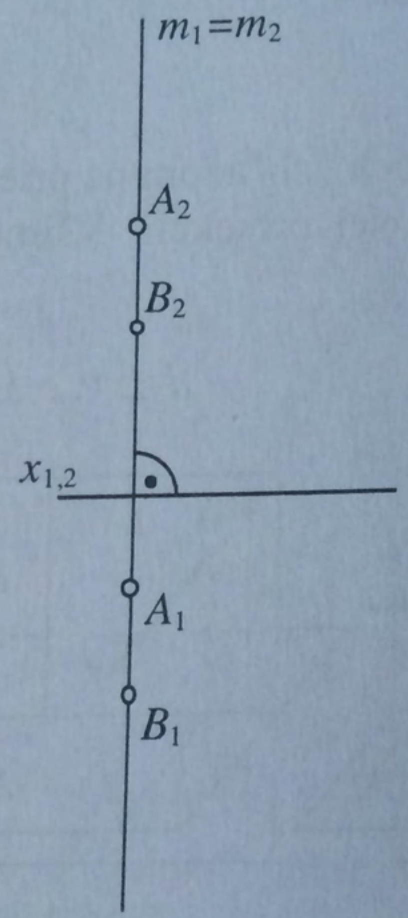


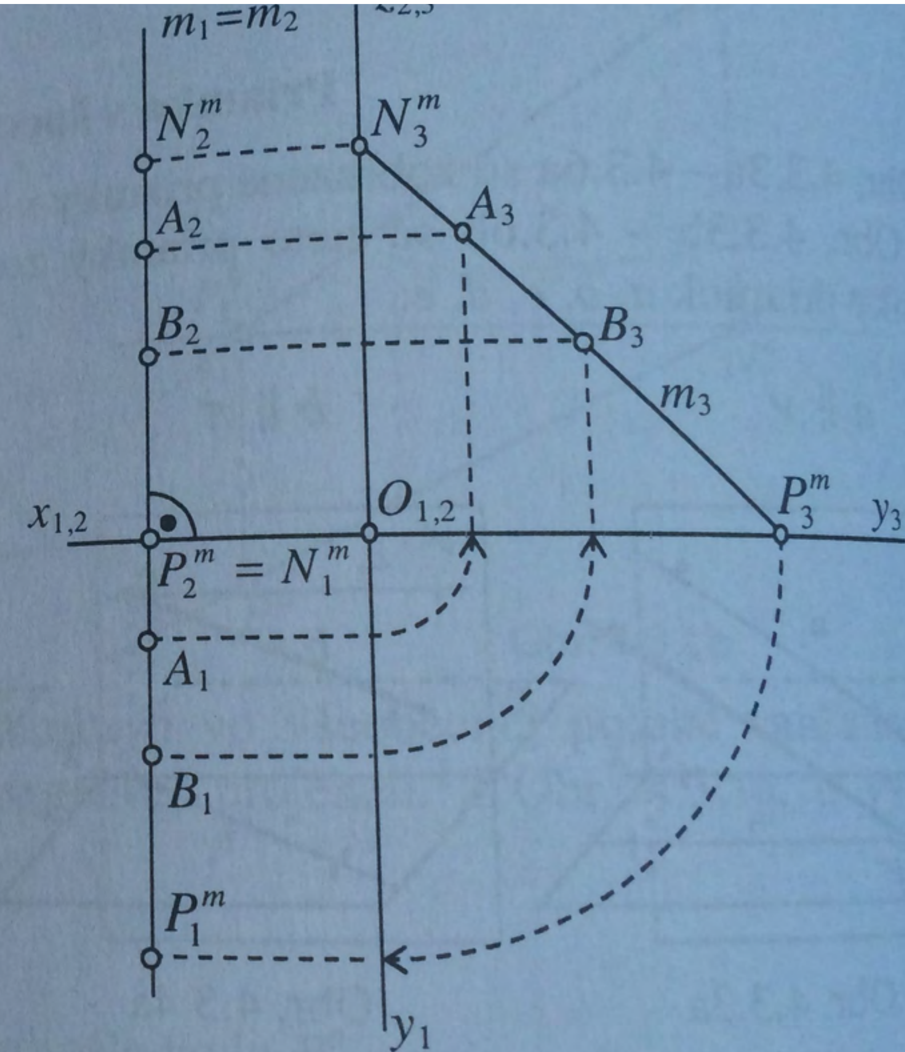

Obr. 4.3.6b

Úloha:

Dané sú združené priemety bodov A, B. Zostrojte stopníky priamky AB - priemety stopníkov.




$m_1=m_2$
$A_2$
$B_2$
$x_{1,2}$
$A_1$
$B_1$


$m_1=m_2$
$N_2^m$
$N_3^m$
$A_2$
$A_3$
$B_2$
$B_3$
$m_3$
$x_{1,2}$
$O_{1,2}$
$P_3^m$
$y_3$
$P_2^m = N_1^m$
$A_1$
$B_1$
$P_1^m$
$y_1$

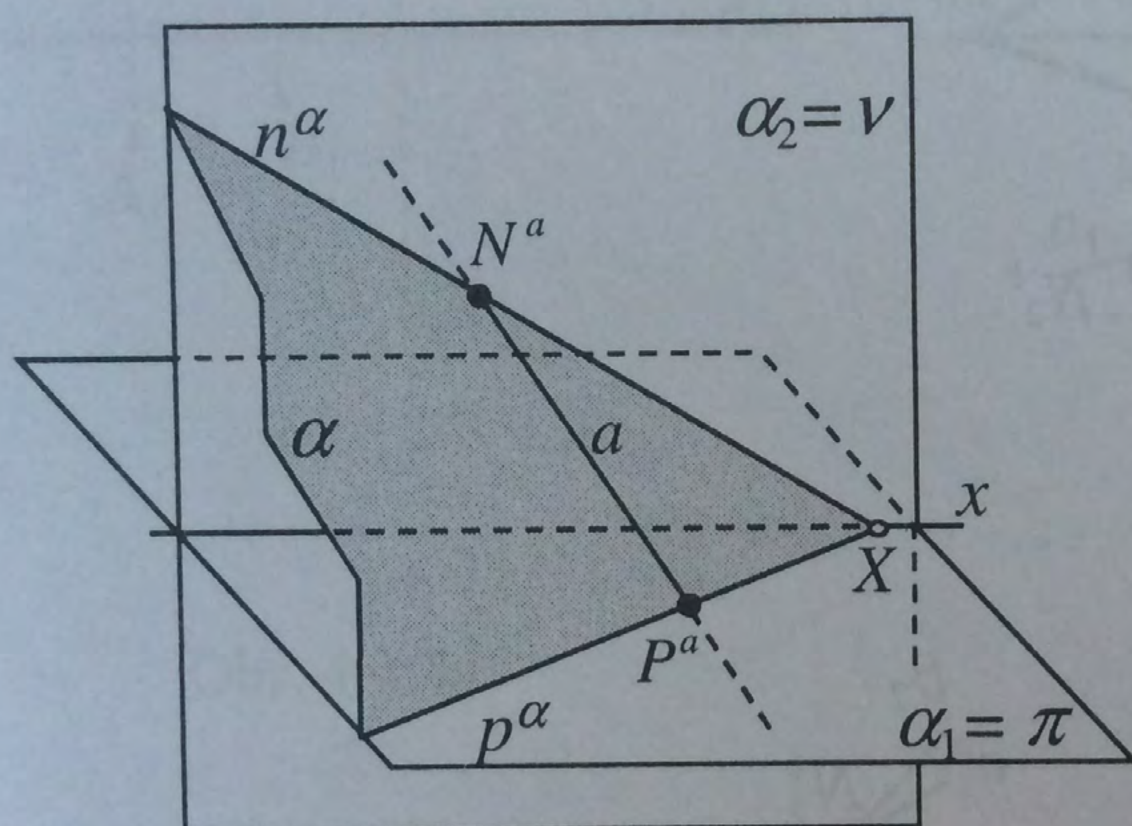
## Obraz roviny v Mongeovej projekcii

- kolmým priemetom roviny môže byť priamka alebo celá rovina

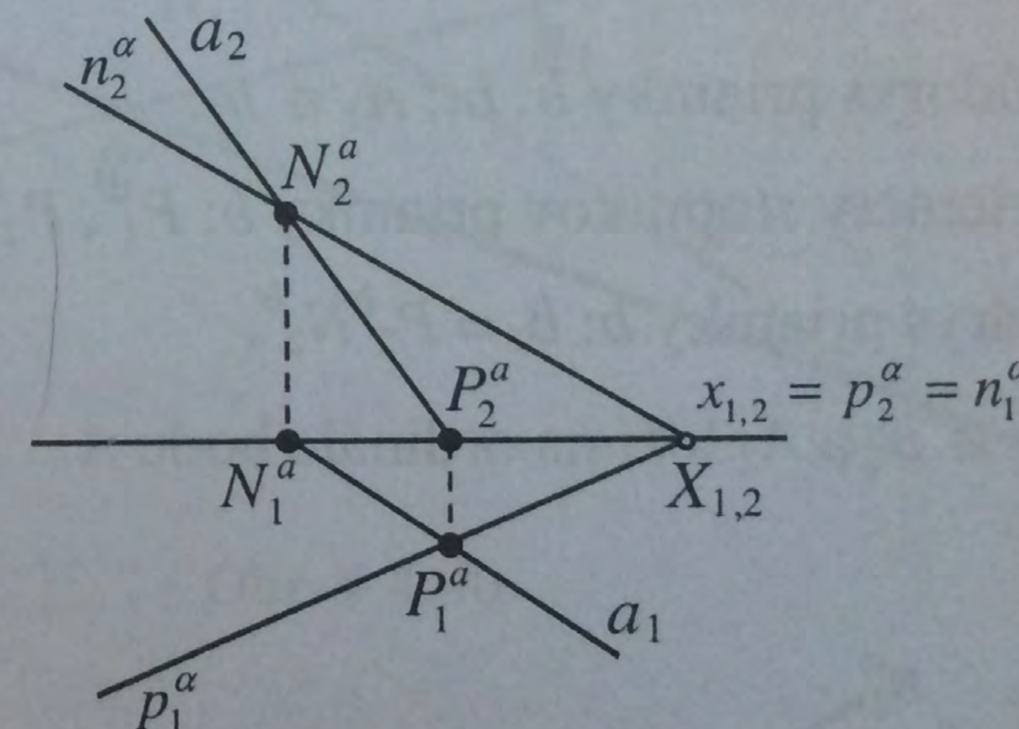
- v prípade, že rovina nie je kolmá na žiadnu priemetňu je jej obraz definovananý dvojicou (trojicou) priamok - stôp roviny (pôdorysná stopa, nárysná stopa) priemet nárysnej stopy roviny $\alpha$.

Na ilustračnom Obr. 4.4.1a je zobrazená rovina $\alpha$ vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne a na vedľajšom Obr. 4.4.1b je táto rovina zobrazená v Mongeovej projekcii. Stopy roviny, ak existujú, sa pretínajú na základnici v bode $X$ alebo sú so základnicou rovnobežn (Obr. 4.4.7a, b). Ak je rovina rovnobežná s niektorou priemetňou, tak príslušnú stopu nem (Obr. 4.4.8a, b, Obr. 4.4.9a, b).

Na jednoznačné určenie priemetu roviny stačí: $p_1{}^\alpha$, $n_2{}^\alpha$, pre zvyšné priemety stôp roviny vžd platí $p_2{}^\alpha = n_1{}^\alpha = x_{1,2}$, preto toto označenie budeme v ďalších obrázkoch vynechávať.




Obr. 4.4.1a




Obr. 4.4.1b

## Priamka v rovine

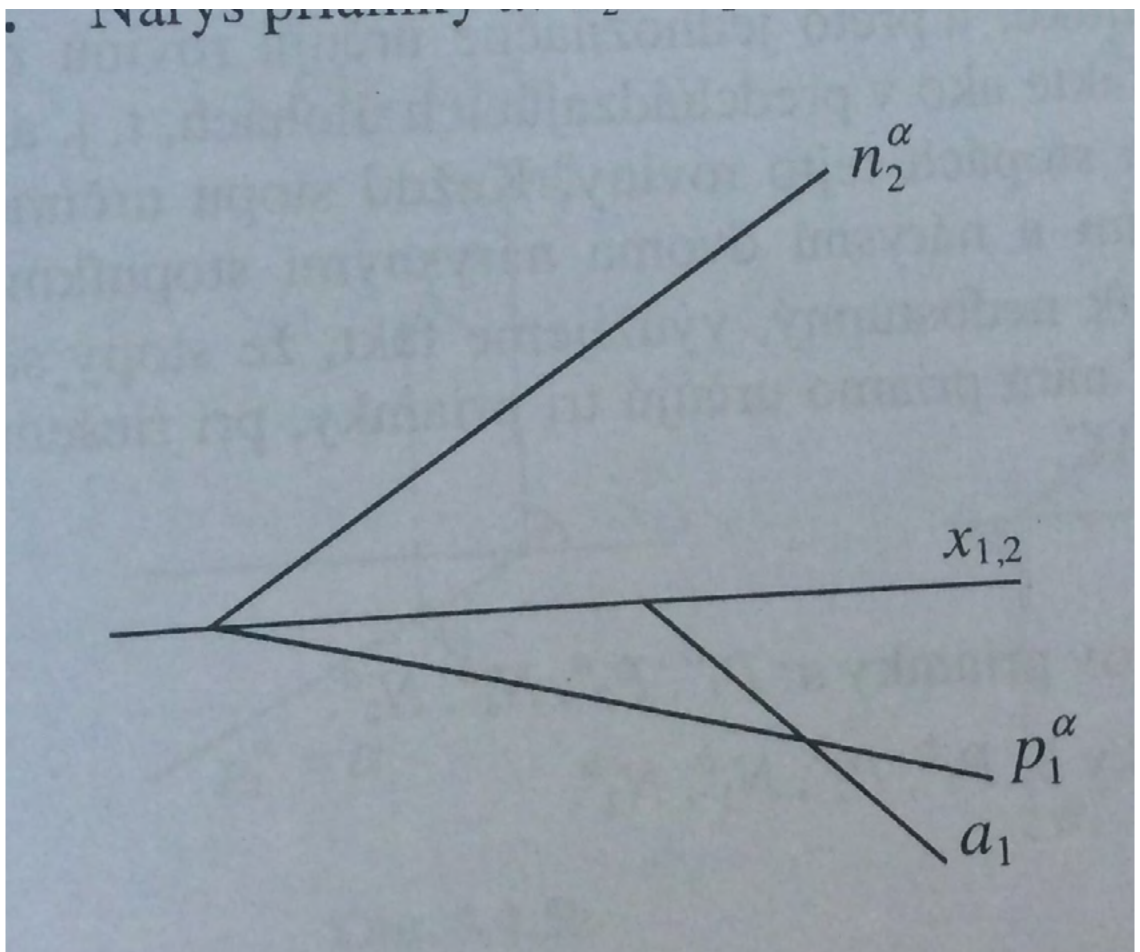
**Veta 4.4.1:** Ak priamka leží v rovine, tak svoje stopníky má na stopách tejto roviny pôdorysný stopník na pôdorysnej stope a nárysný na nárysnej stope, t.j ak $a \subset \alpha$, tak $P^a \in p^\alpha \wedge N^a \in n^\alpha$ (Obr. 4.4.1a, b).

## Priamka v rovine

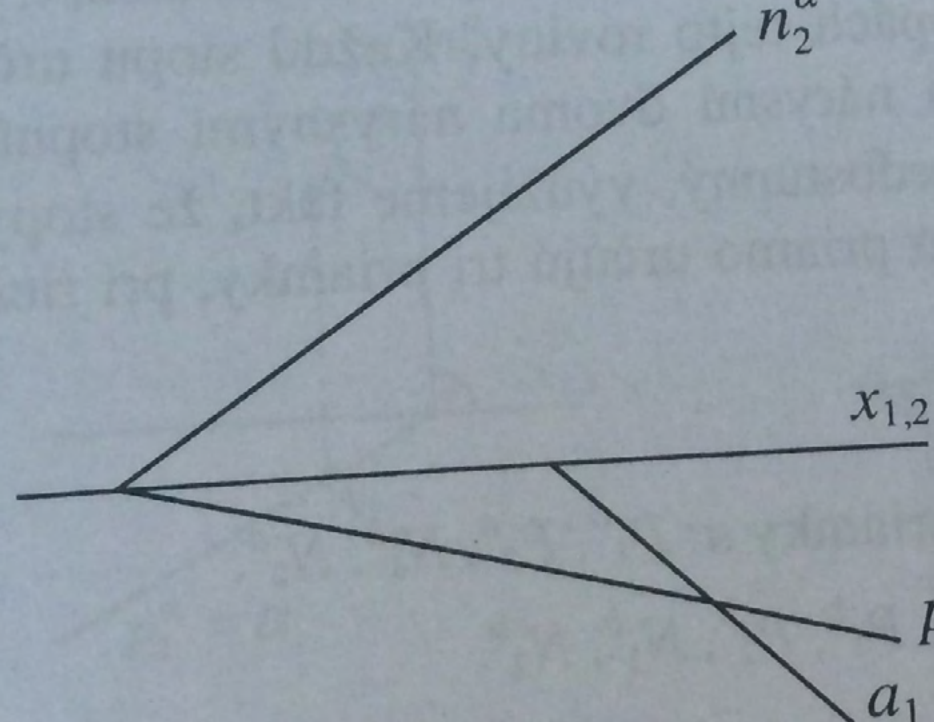
- ak priamka leží v rovine, tak svoje stopníky má na stopách tejto roviny, pôdorysný stopník na pôdorysnej stope a nárysný na nárysnej stope

Úloha:

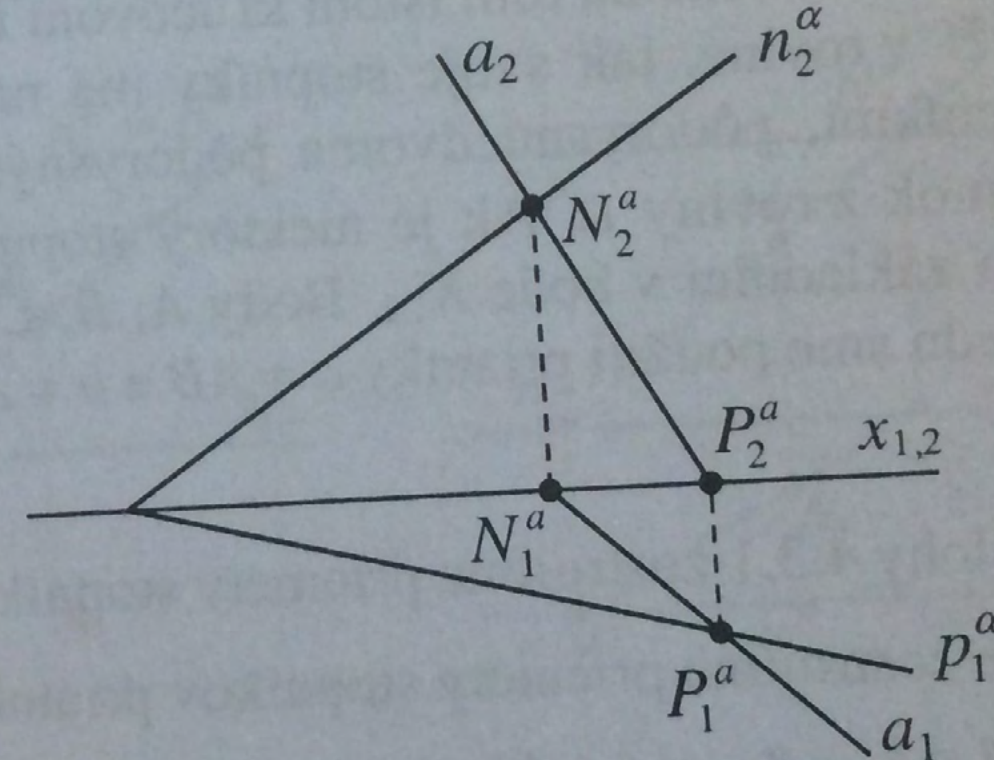
Daná je rovina (svojimi stopami) a podorys priamky a, ktorá leží v danej rovine. Zostrojte nárys priamky a.




Obr. 4.4.2a




Obr. 4.4.2a




Obr. 4.4.2b

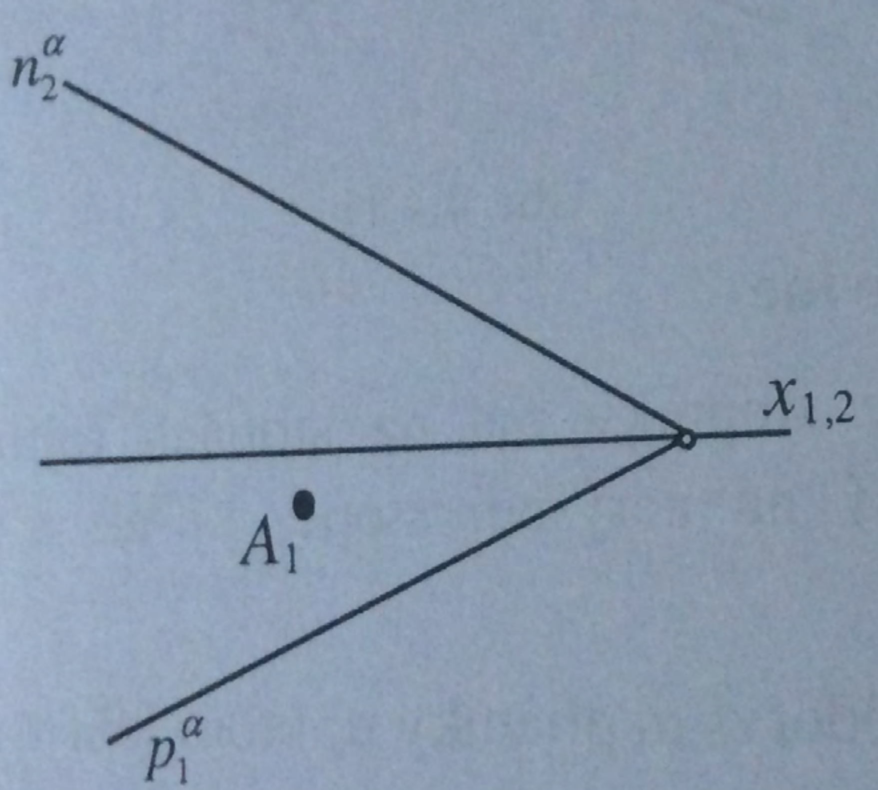
**Bod v rovine**

- bod leží v rovine vtedy, keď leží na niektorej priamke tejto roviny

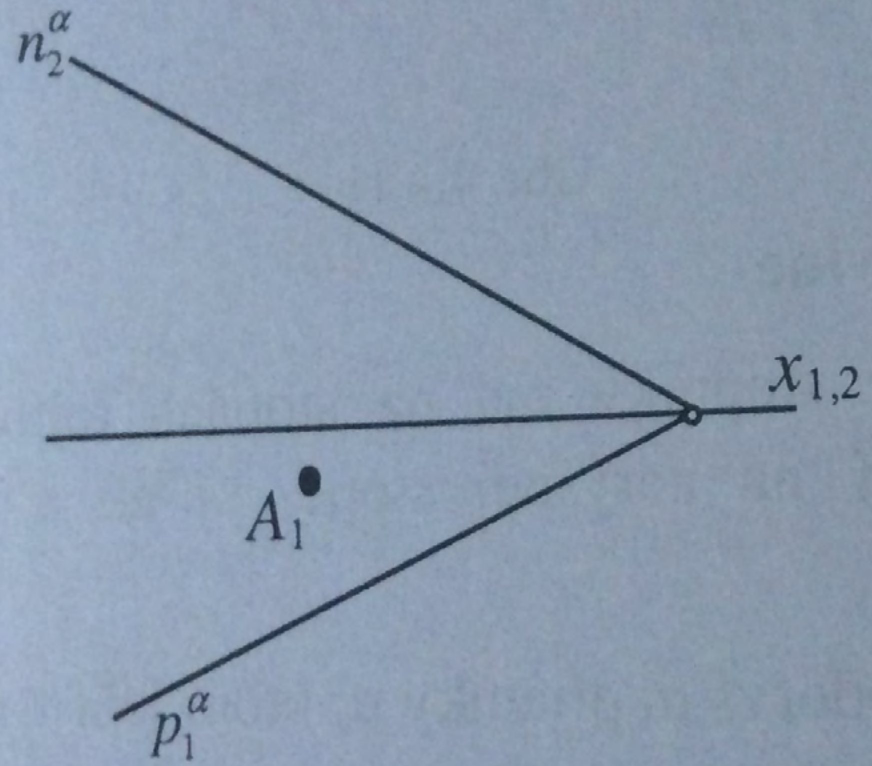
- ak poznáme jeden z priemetov bodu v určitej rovine, druhý primet môžeme zostrojiť pomocou vhodnej priamky roviny prechádzajúcej týmto bodom

Úloha:

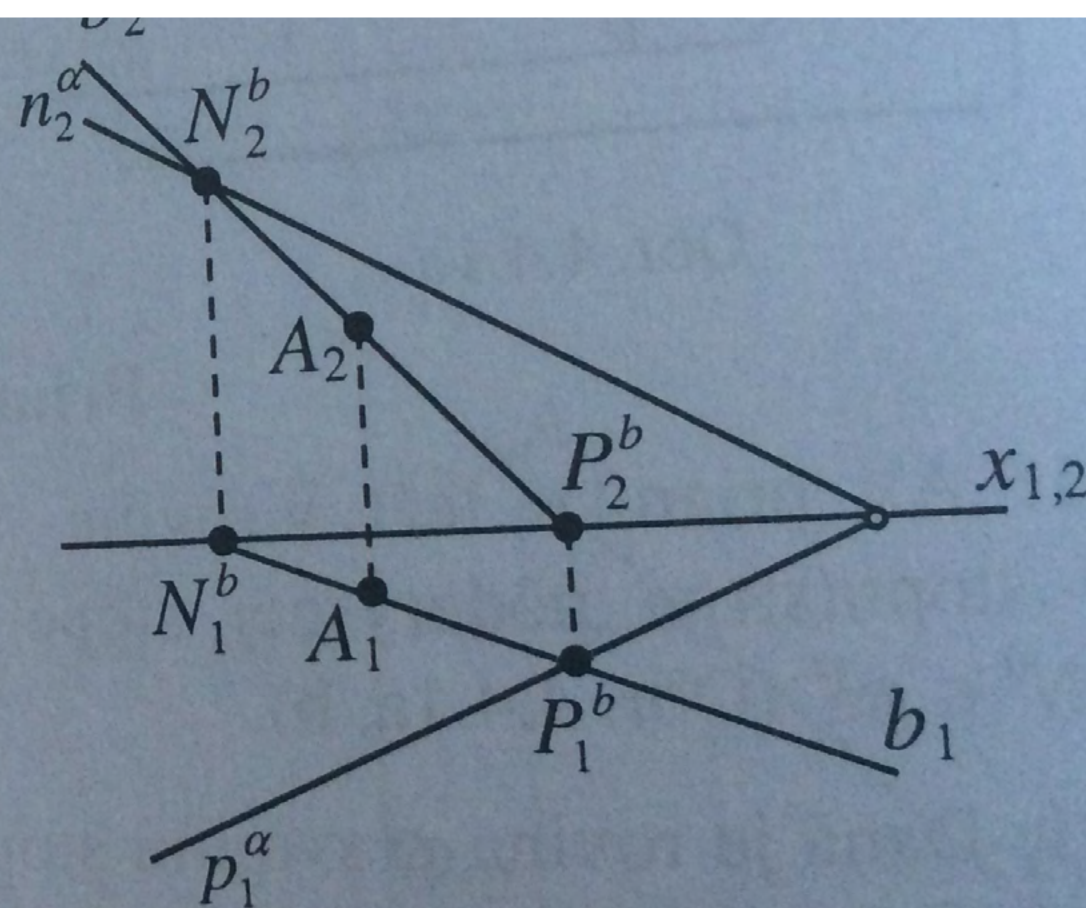
Daná je rovina (svojimi stopami) a pôdorys bodu A, ktorý leží v danej rovine. Zostrojte nárys bodu A.




Obr. 4.4.3a



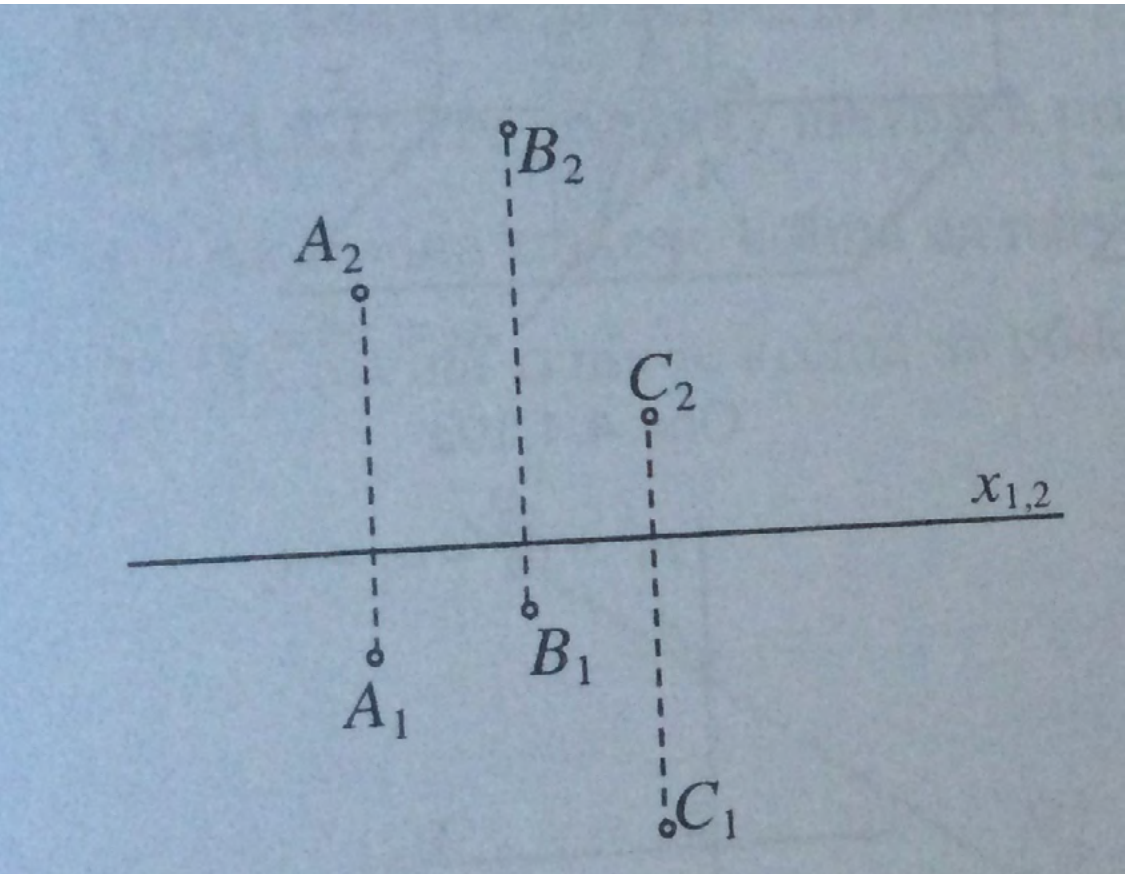

Obr. 4.4.3a

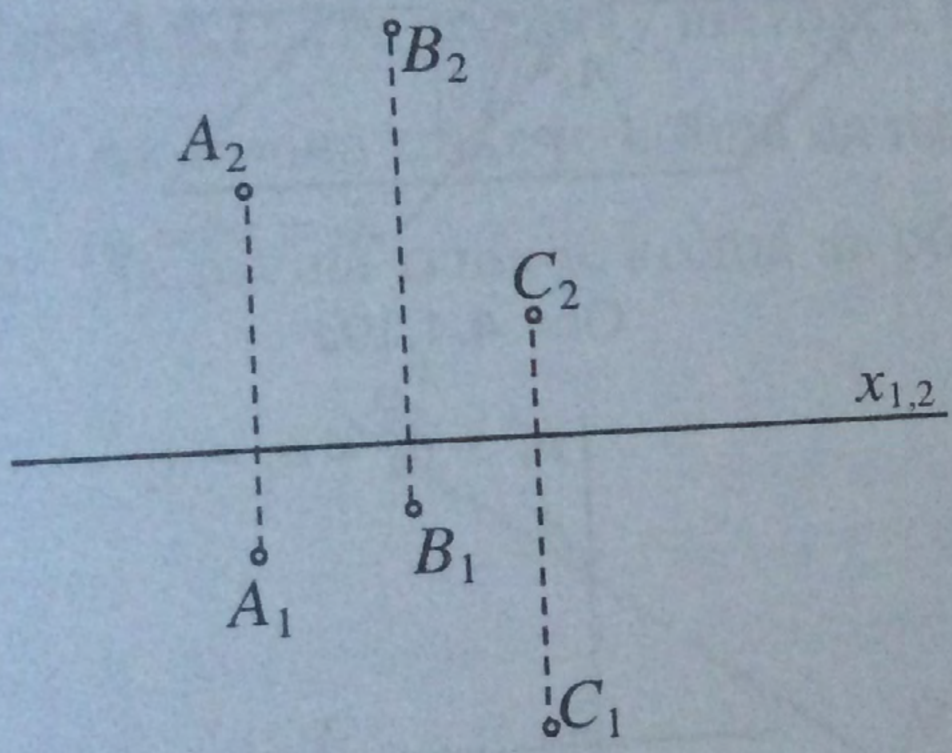



Obr. 4.4.3b

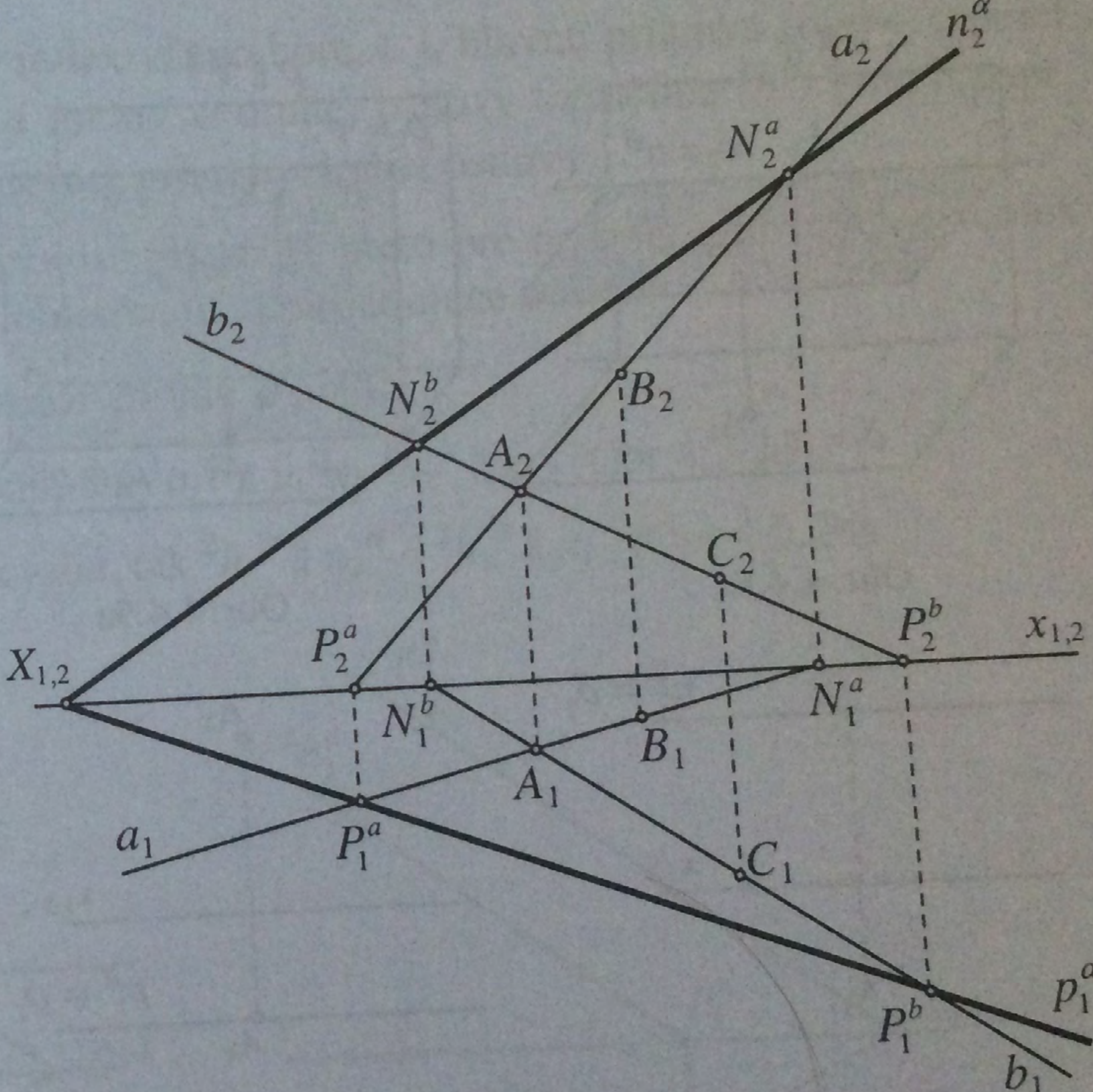
Úloha:

Zostrojte stopy roviny ABC ak sú dané združené priemety bodov






Obr. 4.4.4a




Obr. 4.4.4b

Obr. 4.4.3a

**Úloha 4.4.3:** Zostrojte stopy roviny $\alpha = ABC$. Body $A$, $B$, $C$ sú dané svojimi združenými priemetmi (Obr. 4.4.4a).

**Riešenie:** (Obr. 4.4.4b)

Vidíme, že body $A$, $B$, $C$ neležia na jednej priamke, a preto jednoznačne určujú rovinu $\alpha$. Riešenie bude založené na tom istom kľúčovom fakte ako v predchádzajúcich úlohách, t. j. ak priamka leží v rovine, tak svoje stopníky má na stopách tejto roviny. Každú stopu určíme dvomi stopníkmi, pôdorysnú dvoma pôdorysnými a nárysnú dvoma nárysnými stopníkmi dvoch priamok z roviny $\alpha$. Ak je niektorý stopník nedostupný, využijeme fakt, že stopy sa pretínajú na základnici v bode $X_{1,2}$. Body $A$, $B$, $C$ nám priamo určujú tri priamky, pri riešení nášho príkladu sme použili priamky $a = AB$ a $b = AC$.

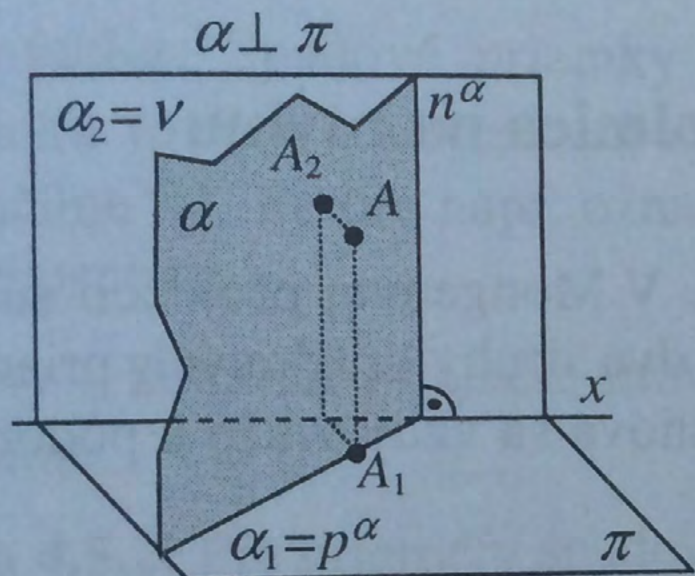
Postup:

1. Podľa úlohy 4.3.1 zostrojíme priemety stopníkov priamky $a$: $P_1^a$, $P_2^a$, $N_1^a$, $N_2^a$.
2. Podobne zostrojíme priemety stopníkov priamky $b$: $P_1^b$, $P_2^b$, $N_1^b$, $N_2^b$.
3. $p_1^\alpha = P_1^a P_1^b$, $n_2^\alpha = N_2^a N_2^b$.

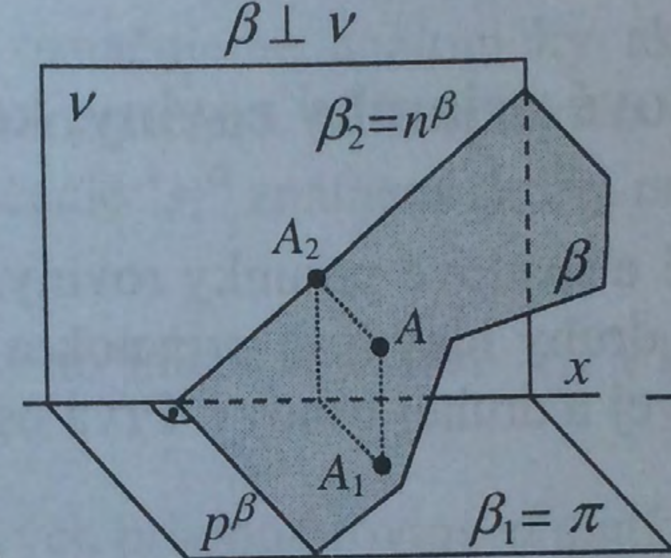
# Rovina v špeciálnej polohe

## Rovina v špeciálnej polohe

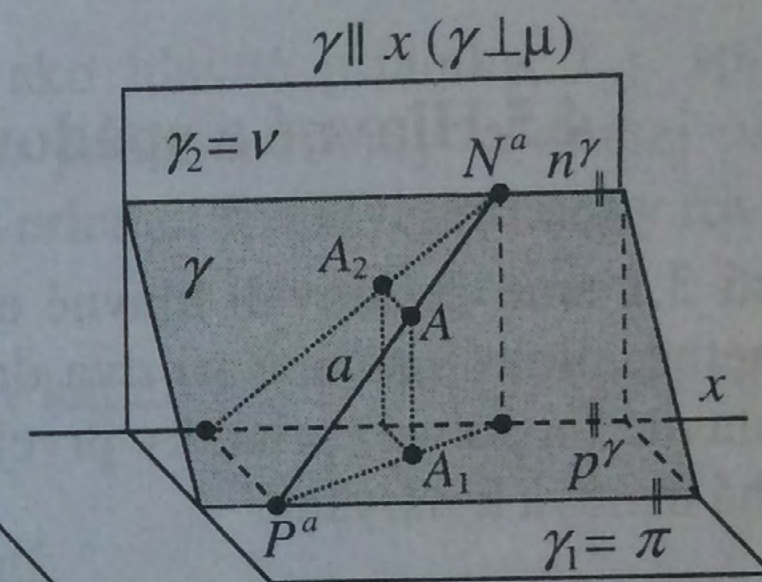
Obr. 4.4.5a – 4.4.10a znázorňujú špeciálne polohy rovín, ich obraz v Mongeovej projekcii je na Obr. 4.4.5b – 4.4.10b.



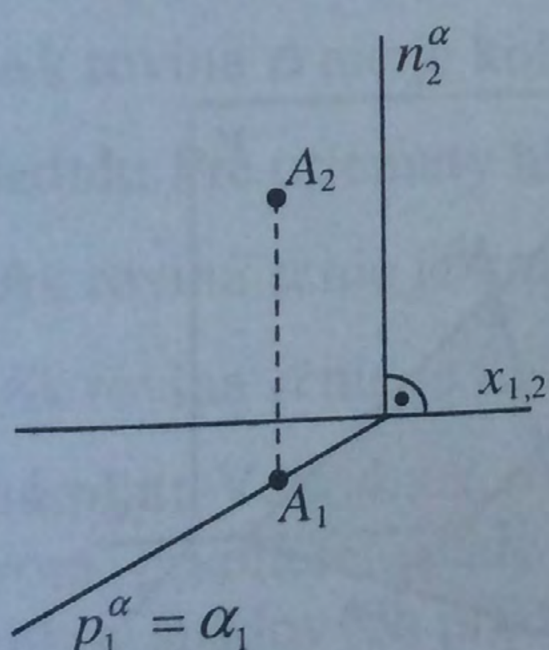

Obr. 4.4.5a



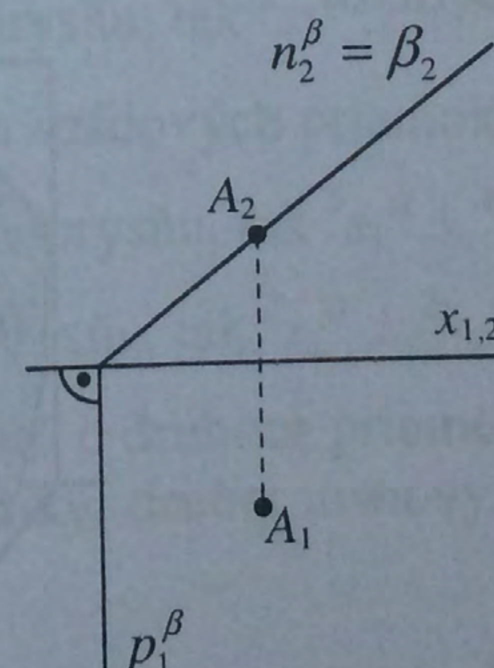

Obr. 4.4.6a



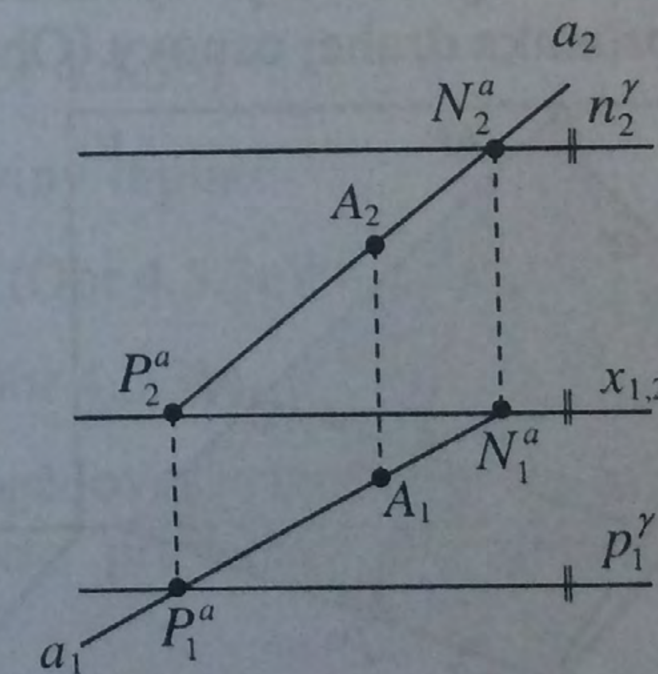

Obr. 4.4.7a




Obr. 4.4.5b




Obr. 4.4.6b




Obr. 4.4.7b

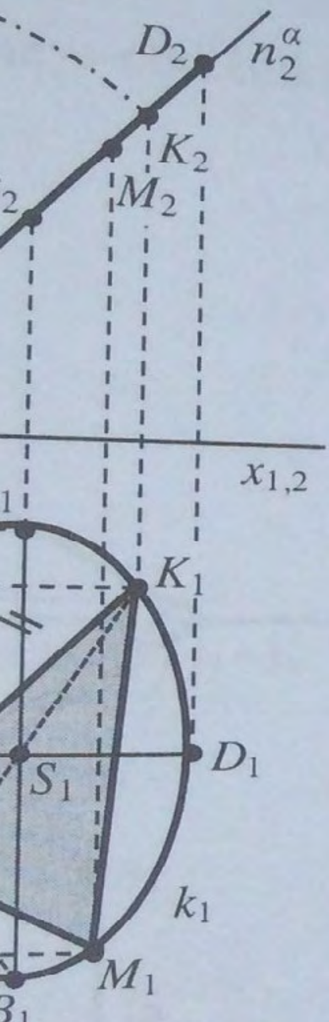
**Úloha 4.10.6:** Zobrazte pôdorys a nárys kružnice $k$, ktorá leží v rovine $\alpha$. Daný je stred $S$ kružnice a jej polomer $r$ (Obr. 4.10.6b).

**Riešenie** (Obr. 4.10.6a):

Pôdorys kružnice $k$ je elipsa $k_1$ a nárys elipsa $k_2$.

Kružnica $k$ má nekonečne veľa priemerov s dĺžkou $2r$. Ich kolmé priemety sú úsečky kratšie, nanajvýš rovnako dlhé ako $2r$.

...leží v rovine $\alpha$.
...4.10.5a).




...finity

...9.2). Otočíme

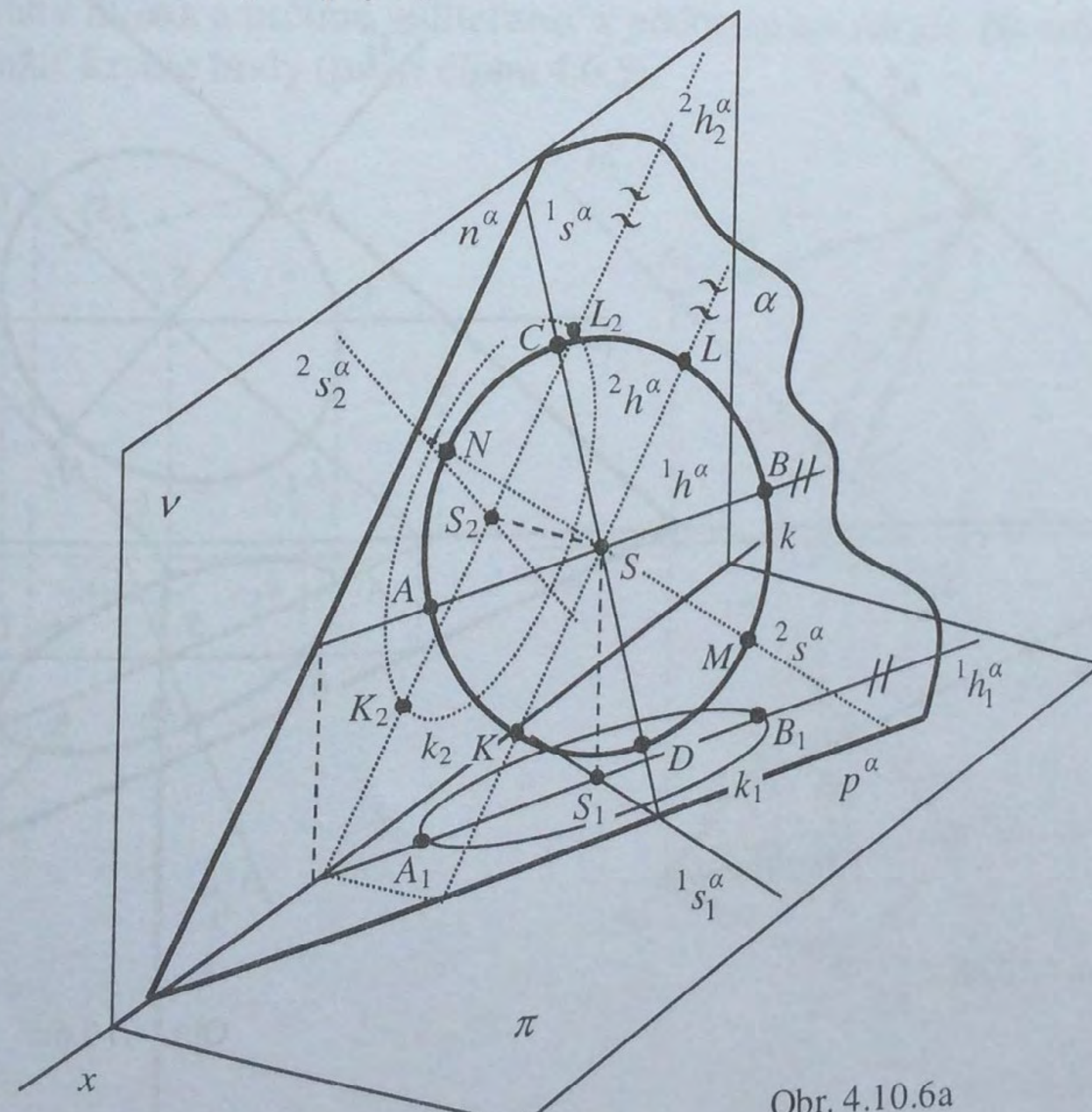
...priesečník osí

Pôdorys kružnice $k$:

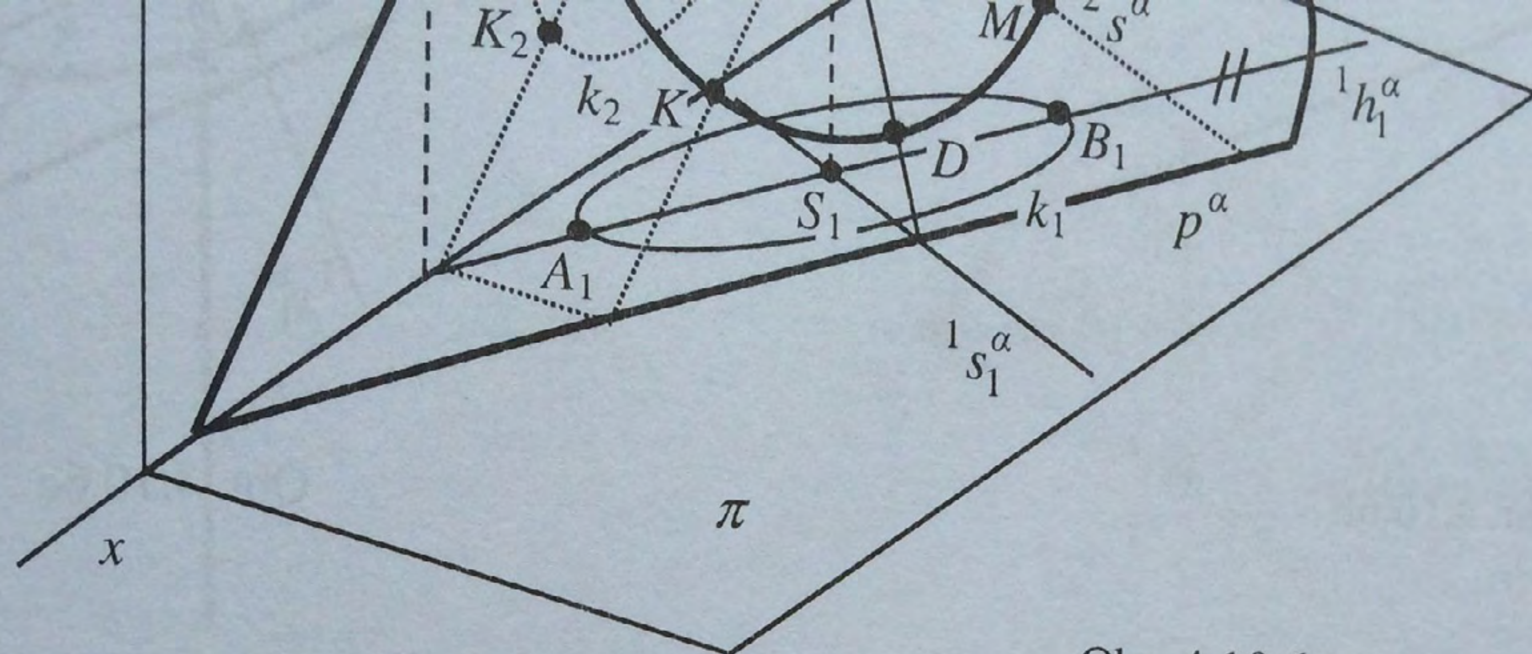
Priemer $AB$, ktorý je rovnobežný s pôdorysňou a leží na hlavnej priamke prvej osnovy roviny $\alpha$ sa premieta do úsečky $A_1B_1$ s dĺžkou $2r$. Body $A_1$ a $B_1$ sú hlavné vrcholy elipsy $k_1$. Priemer $CD$, kolmý na priemer $AB$, leží na spádovej priamke prvej osnovy roviny $\alpha$. Body $C_1$ a $D_1$ sú vedľajšie vrcholy elipsy $k_1$.

Nárys kružnice $k$:

Priemer $KL$, ktorý je rovnobežný s nárysňou a leží na hlavnej priamke druhej osnovy roviny $\alpha$ sa premieta do úsečky $K_2L_2$ s dĺžkou $2r$. Body $K_2$ a $L_2$ sú hlavné vrcholy elipsy $k_2$. Priemer $MN$, kolmý na priemer $KL$, leží na spádovej priamke druhej osnovy roviny $\alpha$. Body $M_2$ a $N_2$ sú vedľajšie vrcholy elipsy $k_2$.




Obr. 4.10.6a




Obr. 4.10.6a

**Postup** (Obr. 4.10.6c):

1. Pomocou hlavnej priamky ${}^1h^{\alpha}$ určíme bod $S_2$.

2. Na priamku ${}^1h_1^{\alpha}$ nanesieme od bodu $S_1$ polomer $r$. Body $A_1$, $B_1$ sú hlavné vrcholy elipsy $k_1$.

3. Určíme vedľajší vrchol $C_1$ elipsy $k_1$:
   Bodom $S$ vedieme spádovú priamku prvej osnovy roviny $\alpha$. Sklopíme ju do pôdorysne a nanesieme na ňu od bodu $(S)$ polomer $r$. $|(C)(S)| = r$.
   $C_1$: $(C)C_1 \perp {}^1s_1^{\alpha} \wedge C_1 \in {}^1s_1^{\alpha}$

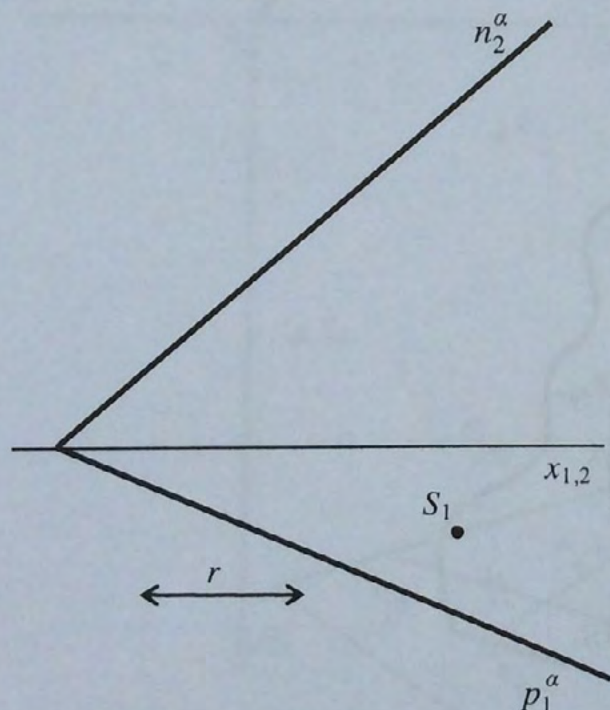
4. Vedľajší vrchol $D_1$ elipsy $k_1$ je súmerný k bodu $C_1$ podľa stredu $S_1$.
   Elipsa $k_1$ je určená vrcholmi $A_1$, $B_1$ a $C_1$, $D_1$.

5. Na priamku ${}^2h_2^{\alpha}$ nanesieme od bodu $S_2$ polomer $r$. Body $K_2$ a $L_2$ sú hlavné vrcholy elipsy $k_2$.

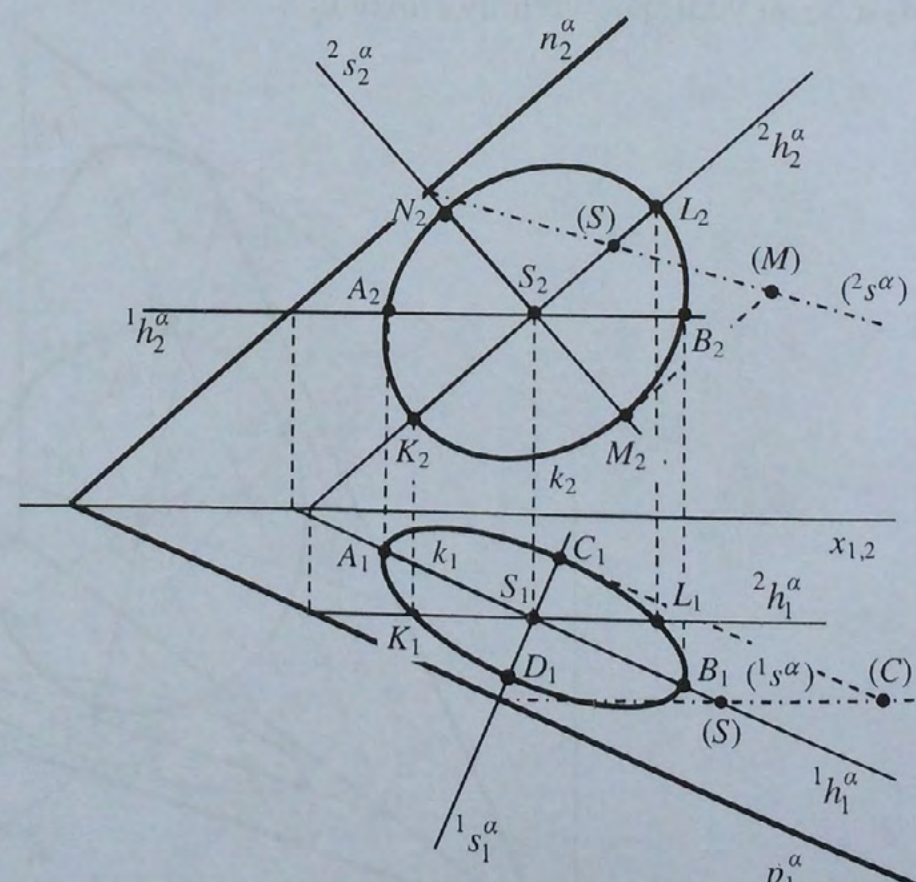
6. Určíme vedľajší vrchol $M_2$ elipsy $k_2$:
Bodom $S$ vedieme spádovú priamku druhej osnovy roviny $\alpha$. Sklopíme ju do nárysne a nanesieme na ňu od bodu $(S)$ polomer $r$. $|(M)(S)| = r$.
$M_2$: $(M)M_2 \perp {}^2s_2^\alpha \wedge M_2 \in {}^2s_2^\alpha$

7. Vedľajší vrchol $N_2$ elipsy $k_2$ je súmerný k bodu $M_2$ podľa stredu $S_2$.
Elipsa $k_2$ je určená vrcholmi $K_2$, $L_2$ a $M_2$, $N_2$.

**Poznámka:** Na určenie dĺžok vedľajších osí elíps $k_1$ a $k_2$ môžeme použiť rozdielovú konštrukciu (pozri úlohu 3.5.7).




Obr. 4.10.6b




Obr. 4.10.6c

## 4.11 Zobrazenie telies

2. Zobrazíme bod $S$, st
V otočenej polohe
Bod $S_1$ určíme pom
trojuholníka $A_1B_1C$

3. Zobrazíme vrchol $V$
Bodom $S$ zostrojím
$k_1 \perp p_1^\alpha \wedge k_2 \perp n_2^\alpha$
Priamka $k$ je rovnob
$V_1$ leží na priamke

4. Doplníme hrany ihla
môžeme použiť kry